Ответы, указания, решения

9-11 классы, высшая лига, Математический бой № 1

1. Клетки таблицы 8×8 изначально белые. Алиса и Боб играют в игру. Сначала Алиса в красный цвет закрашивает n полей. Затем Боб выбирает 4 строки и 4 столбца из таблицы и закрашивает все поля в них в черный цвет. Алиса выигрывает, если осталось хотя бы одно красное поле. Найдите наименьшее число n, при котором Алиса может выиграть игру независимо от того, как играет Боб. **Ответ:** 13. ***Оценка***. $n \geq 13$. Допустим, окрашено 12 клеток. Обозначим a_k количество красных клеток в k-той строке, $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = 12$. Пусть сумма наибольших четырех чисел a_k равна m. Ясно, $m \geq 8$. Остальные 4 закрашиваем столбцами. ***Пример*** на рисунке. Необходимо заметить, что Боб не сможет закрасть 13 красных полей. Пусть Боб провел какие-то линии и закрасил 3 красных поля в левом верхнем квадрате 3×3. В правом нижнем квадрате 5×5 после закрашивания 1 строки остаются не менее, чем 5 красных полей в разных столбцах, после 2 остаются 4, 3 – 2, 2 – 1. (JBMO Shortlist 2018).

1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1

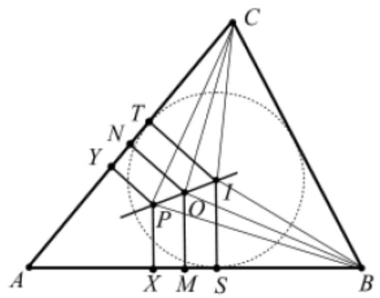
2. Найдите все квадратные трехчлены $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, для которых выполняются равенства: $f(f(1)) = f(f(2)) = f(f(3))$. **Ответ:** $a = 2k$, $b = -8k$, $c = 7k + 2$, $k \neq 0$. Каждое свое значение квадратный трехчлен принимает не более двух раз, значит, возможны следующие случаи: (1). $f(1) = f(2)$, $a + b + c = 4a + 2b + c$, $b = -3a$, $f(x) = ax^2 - 3ax + c$. Далее имеем $f(1) = f(2) = -2a + c$, $f(3) = c$. Если $f(1) = f(2) = f(3)$, то $a = 0$. $f(1) = f(2) \neq f(3)$, поскольку вершина этой параболы находится в $x = 3/2$, выполняется соотношение для целых чисел: $-2a + c + c = 3$, что невозможно. (2). $f(2) = f(3)$, как в первом случае, приходим к двум противоречивым соотношениям $-4a + c = -6a + c$ и $-10a + 2c = 5$. (3). $f(1) = f(3)$, $b = -4a$, $f(x) = a(x-2)^2 - 4a + c$, $f(1) = -3a + c$, $f(2) = -4a + c$, Вершина этой параболы находится в $x = 2$. Рассмотрим условие: $\left(-3a + c\right) + \left(-4a + c\right) = 4$, $-7a + 2c = 4$ – решаем уравнение целых числах, $a = 2k$, $b = -8k$, $c = 7k + 2$. (Romania Mathematical Olympiad 1998).

3. Найдите количество рациональных чисел больших нуля и меньших 1, у которых произведение числителя и знаменателя у несократимой дроби есть 20! (двадцать факториал). **Ответ:** 128. Среди натуральных чисел от 1 до 20 имеется 8 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Количество рациональных чисел, у которых произведение числителя и знаменателя 20! определяется местом простого числа – в числителе или знаменателе, значит, их $2^8 = 256$. Эти рациональные числа разбиваются на пары вида m/n и n/m. Из пары ровно одна дробь меньше 1. Это следует из того, что равенство обеих дробей означает тот факт, что число 20! является квадратом натурального числа. Иными словами равно половина из 2^8 дробей удовлетворяет требованиям задачи, то есть $2^7 = 128$.

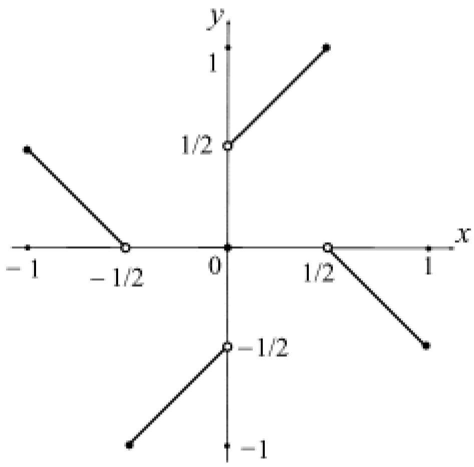
4. Пусть f строго возрастающая функция, определенная на множестве натуральных чисел, принимающая целые значения. Функция f обладает свойствами $f(2) = a > 2$ и

$f(m\cdot n) = f(m)\cdot f(n)$ для любых натуральных чисел m и n. Найдите наименьшее возможное значение a. **Ответ:** $a = 4$. Функция $f(n) = n^2$ удовлетворяет условиям, $f(2) = 4$, значит, $a \le 4$. Предположим, что $f(2) = 3$. Оценим значения $f(3)$. Во-первых, достаточно очевидно свойство $f(n^k) = f(n)^k$. Далее, с одной стороны, $f(3)^5 = f(3^5) = f(243) < f(256) = f(2^8) = f(2)^8 = 3^8 = 3^5\cdot 27 < 3^5\cdot 32 = 6^5$, значит, $f(3) < 6$. С другой стороны, $f(3)^4 = f(3^4) = f(81) > f(64) = f(2^6) = f(2)^6 = 3^6 = 27^2 > 25^2 = 5^4$, значит, $f(3) > 5$. Итак, $5 < f(3) < 6$, противоречие, $f(2) \ne 3$. (The Nordic Mathematical Competition 1987.3).

5. Пусть в треугольнике ABC угол A меньше 60°. Точки X и Y выбраны на сторонах AB и AC, соответственно, так, что $CA + AX = CB + BX$ и $BA + AY = BC + CY$. Перпендикуляры к AB и AC, проведенные в точках X пересеклись в точке P. Докажите, что $\angle$BPC < 120°. **Решение**. Во-первых, точки X и Y это точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC (со сторонами AB и AC, соответственно). Во-вторых, точки касания вневписанной и вписанной окружностей симметричны относительно середин сторон треугольника.



Пусть S и T – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и AC, соответственно, I – центр вписанной окружности. Проведем отрезок PI, из его середины опустим перпендикуляры OM и ON. Получим середины сторон AB и AC, O – центр описанной окружности треугольника ABC. Заметим, что $\angle$BIC < $\angle$BOC. Действительно, $\angle BOC - \angle BIC = 2\angle A - (\angle A/2 + 90°) = 3/2\angle A - 90° < 0$. Значит, точка I лежит внутри окружности, описанной около BOC, а точка P вне ее. Поэтому $\angle BPC < \angle BOC = 2\angle A < 120°$. (Asian Pacific Mathematics Olympiad 2008).



6. Постройте график функции $y = f(x)$, определенной на отрезке [–1, 1], состоящий из конечного числа частей, которыми могут быть точки и прямолинейные сегменты (с концевыми точками, или без одной, или без обеих точек). При этом сама функция удовлетворяет условию $f(f(x)) = -x$. **Решение**. На рисунке изображен возможный график функции. Пусть $x \in [-1, 1]$, $y = f(x)$. Это означает, что пара таких точек (x, y) лежит на графике функции. Далее, из условия следует, что $-x = f(y)$. Это означает, что пара таких точек $(y, -x)$ тоже лежит на графике функции. Вместе с этим, точка $(y, -x)$ получается из точки (x, y) поворотом на 90° вокруг начала координат. Значит, график должен переходить в себя при повороте на 90° (как и при поворотах на 180° и 270°).

7. Злая волшебница Ябеда - Корябеда заставила работать на себя 16 секретных агентов. При этом каждый агент наблюдает не менее чем за одним агентом, но никакие двое агентов не наблюдают друг за другом. При этом любых 10 агентов можно занумеровать так, чтобы первый наблюдал за вторым, второй наблюдал за

третьим и т.д., а последний наблюдает за первым. Покажите, что и любых 11 агентов можно также занумеровать. **Решение**. Во-первых, каждый агент наблюдает не менее чем за семью другими. Допустим, что некий агент A наблюдает не более чем за шестью другими. Тогда, создав группу из 10 агентов, включив в неё агента A, и не включая тех, за кем он наблюдает – эту группу невозможно занумеровать в соответствии с условием. Точно также за каждым агентом наблюдают не менее 7 других агентов. Отсюда следует, что для каждого из агентов найдется не более одного агента – такого, что они друг за другом не наблюдают. Таким образом, получаем, что такие агенты разбиваются на пары. Теперь рассмотрим одиннадцать произвольных агентов. Среди них найдется агент X, для которого нет пары, определенной выше. Это означает, что любой из оставшихся десяти, либо наблюдает, либо наблюдается этим агентом. Занумеруем оставшихся 10 агентов в соответствии с условием задачи. В этом круге найдутся агенты Y и Z такие, что $X \to Y \to Z \to X$. Значит между Y и Z можно вставить агента X. (по мотивам Испанской математической олимпиады и Мурзилки).

8. Докажите, что любое натуральное число n можно превратить в однозначное число, используя несколько раз следующие две операции:

- имеющееся число можно умножить на любое натуральное число и получить новое число;
- у имеющегося числа можно удалить цифру 0 из десятичной записи числа и получить новое число.

Решение. Рассмотрим числа 1, 11, 111, … 11 … 1 – всего $n + 1$ число. Среди них найдутся два числа, имеющие одинаковые остатки от деления на n, вычтем из большего – меньшее число. Получим число вида 11 … 1100 … 0, делящееся на n, 11 … 1100 … 0 = $m \cdot n$. Умножив число n на число m (1), затем удалим нули (2), в результате получим число, состоящее только из единиц: 111 … 11. Далее, 111 … 11 × 82 = 911 … 1102 → 911 … 112 × 9 = 8200 … 08 → 828 → 828 × 25 = 20700 → 27 →27 × 4 = 108 → 18 → 18 × 5 = 90 → 9.

9-11 классы, высшая лига, математический бой № 2

1. Докажите, что для положите $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$льных чисел a, b, c выполняется неравенство. **Решение**. Раскрываем скобки в левой части, получаем $2+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$, доказываемое неравенство станет равносильным следующему неравенству $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$. Далее, преобразуем левую часть нового неравенства $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}-3 \geq 3\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-3$, доказываемое неравенство принимает вид $3\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-3 \geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ или $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

2. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна единице. Найдите минимальное значение $AB + BC + CD + DA + AC + BD$. **Ответ:** $4+2\sqrt{2}$. Обозначим γ угол между диагоналями. Поскольку $1/2 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\gamma = 1$, $AC \cdot BD \geq 2$. Далее, неравенство между средним арифметическим и геометрическим, $AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} \geq 2\sqrt{2}$. Площадь четырехугольника равна $1/2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} \cdot \sin\angle \mathrm{BAD} + 1/2 \cdot \mathrm{CB} \cdot \mathrm{CD} \cdot \sin\angle \mathrm{BCD} = 1$ и $1/2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \sin\angle \mathrm{ABC} + 1/2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{DA} \cdot \sin\angle \mathrm{CDA} = 1$. Отсюда следуют оценки $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} + \mathrm{CB} \cdot \mathrm{CD} \geq 2$ и $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} + \mathrm{CD} \cdot \mathrm{DA} \geq 2$. Сложим эти неравенства, получим $(\mathrm{AB} + \mathrm{CD}) \cdot (\mathrm{AD} + \mathrm{CB}) \geq 4$. Еще раз неравенство:

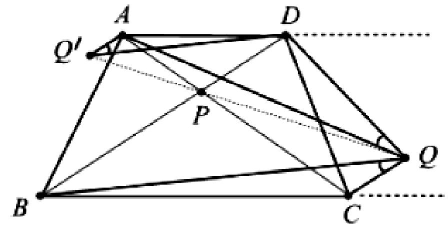
$$AB + BC + CD + DA = \left(AB + CD\right) + \left(AD + CB\right) \geq 2\sqrt{\left(AB + CD\right) \cdot \left(AD + CB\right)} \geq 4.$$

Наименьшее значение достигается на единичном квадрате.

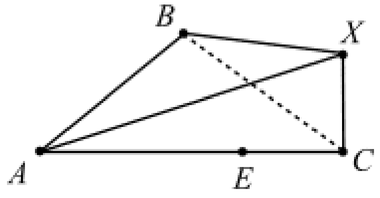
3. Найдите все многочлены, такие что $P(0) = 0$ и $P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$. **Ответ:** такой многочлен единственный $P(x) = x$. Определим последовательность: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ для $n \geq 0$. Поскольку $a_n \geq 1$ для $n \geq 1$ и $a_{n+1} = a_n^2 + 1 \geq a_n + 1 > a_n$, эта последовательность возрастает. Далее, индукцией заметим, что $P(a_n) = a_n$. База $n = 0$ выполняется. Индукционный шаг: $P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 1) = P(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 = a_{n+1}$. Значит, многочлены $P(x)$ и x совпадают в бесконечном множестве точек. Отсюда следует, что они равны.

4. Два игрока по очереди пишут знаки «+» и «–» в пустые клетки полоски $1 \times n$. Первый ставит +, второй – . Не допускается появление двух одинаковых знаков в соседних ячейках. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает игру. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? **Ответ:** второй игрок. Пусть первый игрок ставит + в произвольную клетку. Затем второй помещает – в клетку, которая пуста, и находится с края полоски. После k-того ($k \geq 2$) хода первого, второй способен сделать ход, потому что таблица разделена на части, внутри которых нет знаков. При этом по краям одной из частей стоят два плюса, второй игрок может поставит между ними свой минус. (Обоснуем: после любого хода первого игрока плюсов на одного больше, чем минусов, при этом с одного края полоски стоит минус). Bosnia, 2009.

5. Диагонали трапеции ABCD пересекаются в точке P. Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle \mathrm{AQD} = \angle \mathrm{BQC}$ и прямая CD разделяет точки P и Q. Докажите, что $\angle \mathrm{BQP} = \angle \mathrm{DAQ}$. **Решение**. Рассмотрим гомотетию с центром в точке P, переводящей отрезок BC в отрезок DA. Пусть точка Q переходит в точку Q'. Тогда треугольник BQC переходит в треугольник DQ'A, $\angle \mathrm{BQC} = \angle \mathrm{DQ'A}$ и точки A, D, Q, Q' лежат на одной окружности, $\angle \mathrm{DAQ} = \angle \mathrm{DQ'Q}$. При гомотетии отрезок BQ перейдет в параллельный ему отрезок DQ'. Ясно, $\angle \mathrm{BQP} = \angle \mathrm{BQQ'} = \angle \mathrm{DQ'Q} = \angle \mathrm{DAQ}$.



6. Треугольник, находящийся в плоскости, *хороший*, если для любой точки, не лежащей в плоскости, сумма расстояний от этой точки до двух вершин треугольника больше расстояния от этой точки до третьей вершины треугольника. Определите, какие треугольники хорошие, а какие – нет. **Ответ:** хорошими треугольниками являются равносторонние треугольники, и только они. Пусть в плоскости расположен треугольник ABC, у которого $BC < AC$. На перпендикуляре в точке C к плоскости отметим точку X, обозначим $CX = h$. Выберем достаточно малое h так, что $BX + XC < AC$. Это и будет означать, что треугольник ABC



не хороший. Отметим, что достаточно выбрать $h < \dfrac{AC^2 - BC^2}{2AC}$. Теперь докажем, что хорошими треугольниками являются равносторонние треугольники. Пусть ABC равносторонний треугольник, X' – произвольная точка плоскости. Рассмотрим четырехугольник $ABCX'$. Для него выполняется неравенство Птолемея: $AX'\cdot BC \le BX'\cdot AC + CX'\cdot AB$ откуда следует $AX' \le BX' + CX'$. Тем самым замечено, что для любой точки, лежащей в плоскости, сумма расстояний от этой точки до двух вершин равностороннего треугольника больше расстояния от этой точки до третьей вершины. Пусть теперь точка X не лежит в плоскости треугольника. Обозначим X' – проекцию точки X на плоскость, $XX' = h$, $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$. Далее, $\left(BX + CX\right)^2 = \left(\sqrt{b^2+h^2} + \sqrt{a^2+h^2}\right)^2 = b^2 + h^2 + c^2 + h^2 + 2\sqrt{b^2+h^2}\sqrt{c^2+h^2} >$

$> b^2 + h^2 + c^2 + 0 + 2\sqrt{b^2+0}\sqrt{c^2+0} = \left(b+c\right)^2 + h^2 \ge a^2 + h^2 = AC^2$. Итак, $BX + CX > AC$.

7. Число 18 *не может быть* записано как сумма некоторых *двух* последовательных натуральных чисел, но *может быть* записано *двумя* разными способами как сумма нескольких последовательных натуральных чисел: 5 + 6 + 7 = 18 и 3 + 4 + 5 + 6 = 18. Найдите все натуральные числа, которые не больше 500, не могут быть записаны как сумма *одинадцати* последовательных натуральных чисел, но могут быть записаны *одинадцатью* различными способами, как сумма нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел. **Ответ:** такое число единственное 315.Пусть число N – сумма k натуральных чисел, начиная с числа n:
$N = n + \left(n+1\right) + \ldots + \left(n+k-1\right) = kn + \dfrac{k\left(k-1\right)}{2} = \dfrac{k\left(2n+k-1\right)}{2}$. Если k – нечетное число, $k = 2p+1$, то, ясно, $N = (2p + 1)(n + p)$.Если k – четное число, $k = 2p$, то $N = (2n + 2p - 1)p$. Итак, число N имеет нечетный делитель. Обратно, допустим, $N = (2m + 1)\cdot r$.
Рассмотрим две системы. Первая $2m + 1 = 2p + 1$, $r = n + p$. Из первой системы получаем $m = p$, $n = r - p > 0$ и если $r > m$, то N есть сумма $k = 2m + 1$ (нечетного количества) последовательных натуральных чисел, начиная с $n = r - m$. Вторая $2m + 1 = 2n + 2p - 1$, $r = p$. Из второй системы получаем $n = m - r + 1$, $p = r$ и если $m \ge r$, то N есть сумма $k = 2r$ (четного количества) последовательных натуральных чисел, начиная с $n = m - r + 1$.Таким образом, поскольку всегда реализуется одно из неравенств $r > m$ или $m \ge r$, то для каждого нечётного делителя числа N получим ровно одно представление N в виде суммы последовательных натуральных чисел.
Заметим, что при этом учитывается сумма и из одного слагаемого – само число N, соответствующая разложению $N = 1\cdot N$. Значит, сумм из нескольких слагаемых на одну меньше, чем нечётных делителей числа S. Таким образом, достаточно найти числа, не делящиеся на 11 и имеющие 12 нечетных делителей. Далее, количество делителей числа, представленного в каноническом виде $p^{a_1}\cdot p^{a_2}\cdot\ldots\cdot p^{a_s}$ – произведения простых множителей равно $\left(a_1+1\right)\cdot\left(a_2+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_s+1\right)$. Значит, имеющие 12 нечетных делителей имеют вид $2^a\cdot p_1^2\cdot p_2^3$ или $2^a\cdot p_1^2\cdot p_2\cdot p_3$. Поскольку $3^2\cdot 5^3 = 1125 > 3^3\cdot 5^2 = 675 > 500$, получаем $2^a\cdot p_1^2\cdot p_2^3 > 500$, что невозможно. Во втором случае, если $p_1 \ge 5$, то

$2^a \cdot p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \geq 25 \cdot 3 \cdot 7 = 525 > 500$, $p_1 = 3$, далее легко получаем $N = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$. (Усиление Canadian Open Mathematics Challenge 2005).

8. Десять студентов купили несколько книг в книжном магазине. Известно, что каждый студент купил ровно три разных книги, и любые двое из них купили хотя бы одну одинаковую книгу. Определите, какое наименьшее количество студентов купили самую популярную книгу? (Самая популярная книга означает, что ее купили максимально возможное число студентов.) **Ответ:** 5. Пусть один из них купил книги a, b и c. Есть девять других людей, ясно, что есть книга, которую купили 5 студентов или каждая из книг a, b и c были куплены тремя из девяти.Допустим, что каждая книга была куплена не более 4 раз. Обозначим n_k – количество книг проданных k раз. Тогда, с одной стороны, количество продаж это $1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 = 30$. С другой стороны, если посчитать все пары людей, которые купили книгу, это будет $\binom{10}{2} = 45$.

   Далее, если книга продана два раза, ровно одна пара поучаствовала в покупке этой книги, если же книга продана три раза, ровно три пары поучаствовали в покупке этой книги, наконец, книга, проданная четыре раза, формирует 6 пар. Значит, $n_2 + 3 \cdot n_3 + 6 \cdot n_4 \geq 45$. Из системы $\begin{cases} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 30 \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 \geq 45 \end{cases}$ получаем неравенство $-3n_3 - 4n_2 - 3n_1 \geq 0$. Из него следует, что $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Но тогда первое уравнение примет вид $4n_4 = 30$. Противоречие. Значит, есть книга, которую купили, по крайней мере, 5 человек. Пример: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{c, d, e\}$, $\{c, d, e\}$, $\{e, f, a\}$, $\{e, f, a\}$, $\{a, g, d\}$, $\{c, g, f\}$, $\{e, g, b\}$, $\{b, d, f\}$.

9-11 классы, высшая лига, математический бой № 3

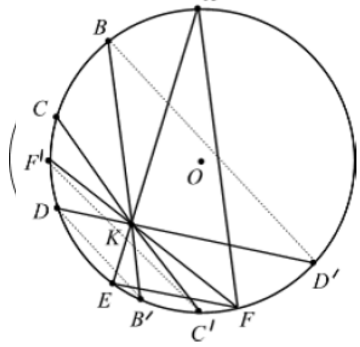
1. Решите систему уравнений в целых числах: $\begin{cases} x_1 = (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^{2020} \\ x_2 = (x_1 + x_3 + \ldots + x_n)^{2020} \\ \ldots \\ x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^{2020} \end{cases}$.

Ответ: если $n = 2$, то $(0, 0)$ и $(1, 1)$; если$n \geq 3$, то $(0, 0, \ldots, 0)$.

Во-первых, ясно, что для $n = 1$ система не имеет смысла. Во-вторых, правые части уравнений неотрицательные, значит, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$– некоторое решение системы уравнений. Обозначим $x_m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим m-ое уравнение: $x_m = \left(\sum_{k \neq m} x_k\right)^{2020}$. Если $x_m = 0$, то $\sum_{k \neq m} x_k = 0$ и поскольку $x_k \geq 0$, получаем $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, при этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$–решение системы уравнений. Пусть далее $x_m \geq 1$. В силу неравенства $\left(\sum_{k \neq m} x_k\right)^{2020} \geq \left((n-1)x_m\right)^{2020}$ получаем справедливое неравенство $x_m \geq \left((n-1)x_m\right)^{2020}$. Ясно, что если $n \geq 3$, оно не выполняется, то есть $n \geq 3$ система имеет только нулевые решения.

Наконец, для $n = 2$ неравенство принимает вид $x_m \geq x_m^{2020}$ и с учетом $x_m \geq 1$ может выполняться, только если $x_m = 1$. Сама система принимает $\begin{cases} x_1 = x_2^{2020} \\ x_2 = x_1^{2020} \end{cases}$ при этом замечено, что x_1 или x_2 равно 1. Значит, $x_1 = x_2 = 1$.

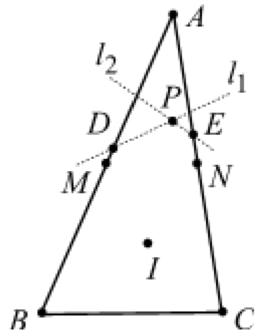
2. Числа a, b, c отличны от нуля и удовлетворяют соотношениям $a + b + c = abc$ и $a^2 = bc$. Докажите, что $a^2 \geq 3$. ***Первое решение***. Из условия имеем $b + c = abc - a = a^3 - a$ и $b \cdot c = a^2$. Значит, b и c корни квадратного уравнения $t^2 - (a^3 - a)t + a^2 = 0$, значит, его дискриминант неотрицательный. $D = (a^3 - a)^2 - 4a^2 = a^2(a^2 + 1)(a^2 - 3)$. ***Второе решение***. Из первого соотношения $a = \dfrac{b+c}{bc-1}$. Отметим сразу, что из $bc = 1$, следуют два противоречивых соотношения $b + c = 0$ и $a^2 = bc > 0$. Далее, $\sqrt{bc} = \dfrac{b+c}{bc-1} \geq \dfrac{2\sqrt{bc}}{bc-1}$, откуда $bc \geq 3$.
3. Докажите, что для любого иррационального числа a, найдутся иррациональные числа b и c, такие, что оба числа $a + b$ и $a \cdot c$– иррациональные числа, а оба числа $a + c$ и $a \cdot b$ – рациональные числа. **Решение.** На самом деле здесь две задачи. Первая. Покажем, что найдется число b для которого$a + b$ иррациональное число, $a \cdot b$ – рациональное. Положим $b = 1/a$ – иррациональное число, тогда, очевидно, $a \cdot b$ – рациональное число. Если $a + 1/a$ иррациональное число – первая задача решена. Если нет, то положим $b = 2/a$. Очевидно, что $a + b = (a + 1/a) + 1/a$ иррациональное число. Вторая задача – построить число c. В случае, когда a^2– иррациональное число, положим $c = -a$. Ясно $a + c = 0$ – рациональное число, $a \cdot c = -a^2$– иррациональное. Пусть a^2 рациональное число. Положим $c = a^2 - a$. Тогда $a + c = a^2$ – рациональное число, $a \cdot c = a^2(a - 1)$ – иррациональное. (AsianPacificMathematicsOlimpiad, 2005)
4. Из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ выбираются трехэлементные подмножества $\{a, b, c\}$ (без повторений чисел). Каких подмножеств больше, тех, у которых $a + b + c < 3030$ или тех, у которых $a + b + c > 3030$. **Ответ:** больше тех, у которых $a + b + c > 3030$. Обозначим A – совокупность трехэлементных подмножеств $\{a, b, c\}$ у которых $a + b + c < 3030$, B – у которых $a + b + c > 3030$. Каждой тройке $\{a, b, c\}$ из A сопоставим тройку $\{2021 - a, 2021 - b, 2021 - c\}$. Ясно, что разным тройкам $\{a, b, c\}$ из A соответствуют разные тройки $\{2021 - a, 2021 - b, 2021 - c\}$. Поскольку $(2021 - a) + (2021 - b) + (2021 - c) = 6063 - (a + b + c) > 3030$, все тройки $\{2021 - a, 2021 - b, 2021 - c\}$ попадают в B, значит в B не меньше элементов, чем в A. Более того, в B есть элемент $\{1010, 1011, 1012\}$, которому нет соответствующего элемента из A. (Индийская математическая олимпиада, по мотивам).
5. Шестиугольник ABCDEF вписан в окружность, при этом стороны AB, BC, CD и DE равны между собой. Точка K на диагонали AE удовлетворяет соотношениям $\angle$BKC = $\angle$KFE, $\angle$CKD = $\angle$KFA. Докажите, что KC = KF. ***Первое решение***. Из условия следует $\angle BKD = \angle EFA$, угол EFA равен половине центрального угла, причем эта половина равна углу BOD. Таким



образом, $\angle BKD = \angle BOD$, значит, точки $BOKD$ лежат на одной окружности. Треугольник BKD вписан в эту окружность, из равенства $BO = OD$, следует, что точка O есть середина дуги BD. Значит, KO биссектриса внешнего угла BKD.Поскольку при симметрии относительно прямой KO окружность с центром O переходит в себя, а BB'вDD', получаем $DK = KB'$ и $BK = KD'$. Пусть F' – середина дуги $B'D'$. При симметрии точка C перейдет в точку F', значит, $KC = KF'$. Кроме того, $FB = AB$, значит, $AF' \| BB'$. Далее, получаем $\angle AF'K = \angle F'KB' = \angle CKD = \angle KFA$, значит, $F' = F$ и $KC = KF$.

Второе решение. Пусть B', C', D', F' – вторые точки пересечения BK, CK, DK, FK с окружностью. Тогда $\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{C'D'}\right) = \angle AFF'$ $\angle AFF' = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BF'}\right)$, значит, $\overset{\frown}{C'D'} = \overset{\frown}{BF'}$. Отсюда следует параллельность $F'C'$ и BD'. Аналогично получаем параллельность $F'C'$ и $B'D$. Ясно, что $BD'B'D$ равнобокая трапеция, у которой K – точка пересечения диагоналей. Треугольник $F'KC'$ равнобедренный, поэтому $\overset{\frown}{C'F} = 2\angle C'F'K = 2\angle F'C'K = \overset{\frown}{CF'}$ и CF и $C'F'$ параллельны, точка K на серединном перпендикуляре к CF. (ChineseTeamSelectionTests 2016).

6. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC,M и N – середины сторон AB и AC. Точки D и E лежат на прямыхAB и AC так, что $BD = CE = BC$. Прямая l_1 проходит через точку D и перпендикулярна прямой IM. Прямаяl_2 проходит через точку E и перпендикулярна прямой IN. Точка P – точка пересечения прямыхl_1 и l_2. Докажите, что AP и BC перпендикулярны. ***Лемма.*** Пусть точки $X \neq Y$ и $S \neq T$ расположены на плоскости. Тогда прямые XY и ST перпендикулярны тогда и только тогда, когда $XS^2 - YS^2 = XT^2 - YT^2$.



Доказательство леммы следует из тождества:
$$(\vec{x}-\vec{s})\cdot(\vec{x}-\vec{s})-(\vec{y}-\vec{s})\cdot(\vec{y}-\vec{s})-(\vec{x}-\vec{t})\cdot(\vec{x}-\vec{t})+(\vec{y}-\vec{t})\cdot(\vec{y}-\vec{t})=2(\vec{y}-\vec{x})\cdot(\vec{s}-\vec{t}).$$
Заметим сразу, что $ID = IC$ и $IE = IB$ (это следует из равенства треугольников BDI и BCI, CEI и CBI), кроме того, $MD^2 = \left(BC - AB/2)^2\right)$ и $NE^2 = \left(BC - AC/2)^2\right)$.Отрезки PM и PN медианы треугольников APB и APC, значит, $2PA^2 + 2PB^2 = 4PM^2 + AB^2$ и $2PA^2 + 2PC^2 = 4PN^2 + AC^2$. Отсюда следует равенство $2BP^2 - 2CP^2 = 4PM^2 - 4PN^2 + AB^2 - AC^2$.В силу леммы условие перпендикулярности может быть записано в виде соотношений: $IP^2 - ID^2 = MP^2 - MD^2$ и $IP^2 - IE^2 = NP^2 - NE^2$. Отсюда следует равенство $PM^2 - PN^2 = MD^2 - NE^2 + IE^2 - ID^2$. Далее, $IE^2 - ID^2 = IB^2 - IC^2 = (p-b)^2 - (p-c)^2$. Рассмотрим $PM^2 - PN^2$ через длины сторон треугольника ABC: $(a - c/2)^2 - (a - b/2)^2 + (p-b)^2 - (p-c)^2$. После преобразований получаем $PM^2 - PN^2 = c^2/4 - b^2/4 = AB^2/4 - AC^2/4$. Итак, $2BP^2 - 2CP^2 = 4\left(AB^2/4 - AC^2/4\right) + \left(AB^2 - AC^2\right) = 2AB^2 - 2AC^2$. Применение леммы завершает решение задачи.

7. На острове живет n аборигенов. Любые двое из них являются либо друзьями, либо врагами. Однажды вождь приказал, чтобы все граждане (включая его) изготовили и носили ожерелье с некоторым количеством камней так, чтобы: (a) у любых двух друзей, в их ожерельях есть камни одинакового цвета;(b) у любых двух врагов, в их ожерельях нет камней одинакового цвета. Определите, каково минимальное количество цветов камней, необходимых аборигенам для выполнения приказа вождя? **Ответ:** $\lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil$. *Оценка.* Рассмотрим граф: вершины графа – аборигены, ребра – пары друзей. Предположим, что граф оказался двудольным. В этом случае ни один цвет не может быть общим для более чем двух аборигенов из одной доли. Значит, цветов требуется не менее чем ребер в двудольном графе на n вершин, то есть не менее, чем $\lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil$. Докажем индукцией по n достижимость оценки. База индукции $n = 1, 2, 3$ легко проверяется. Пусть $n \geq 4$. Будем доказывать, что из справедливости утверждения для $n - 3$, следует справедливость для n. Предположим, что граф не имеет треугольников. Пусть m–максимальная степень вершин, вершина V смежная с $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Последние m вершин не смежны между собой, а степень каждой из них не выше $n - m$, а сумма степеней не выше $m \cdot (n - m)$. Каждая из $(n - m - 1)$ не рассмотренных вершин имеет степень не выше m, а сумма степеней не выше $(n - m - 1) \cdot m$. Таким образом, в целом сумма степеней вершин графа не больше $m + m \cdot (n - m) + (n - m - 1) \cdot m = 2m \cdot (n - m)$, соответственно ребер не выше $m \cdot (n - m)$. Оценка $m \cdot (n-m) \leq \lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil$ имеет место для любого m. Таким образом, мы можем назначить каждой паре друзей определенный цвет в количестве не превышающем $\lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil$. Пусть граф имеет треугольник. Тогда требуется один цвет для аборигенов из треугольника. Требуется не более $n - 3$ цветов для пар абориген из треугольника – абориген не из треугольника. Требуется $\lfloor n-3/2 \rfloor \cdot \lceil n-3/2 \rceil$ для пар не из треугольника. Остается заметить оценку $1 + (n-3) + \lfloor n-3/2 \rfloor \cdot \lceil n-3/2 \rceil < \lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil$. (Белорусская математическая олимпиада 2001).

8. Пусть функция f определена на множестве натуральных чисели все ее значения – натуральные числа. При этом $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3n) = 3f(n)$, $f(3n + 1) = 3f(n) + 2$, $f(3n + 2) = 3f(n) + 1$. Найдите количество натуральных чисел $n \leq 2020$, для которых $f(n) = 2n$. **Ответ:** 134. Посмотрим поведение функции f в троичной системе: $f(1_3) = 2_3$; $f(2_3) = 1_3$; $f(3_{10}) = 6_{10}$ или $f(10_3) = 20_3$; $f(4_{10}) = 8_{10}$ или $f(11_3) = 22_3$; $f(5_{10}) = 7_{10}$ или $f(12_3) = 21_3$; $f(8_{10}) = 4_{10}$ или $\mathrm{f}(22_3) = 11_3$. Наблюдения показывают, что функция меняет 1 на 2 и 2 на 1 в троичной записи числа, при этом цифру 0 не меняет. Докажем это индукцией. Индукционное утверждение: если $n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \ldots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, то $f(n) = g(a_k) 3^k + g(a_{k-1}) 3^{k-1} + \ldots + g(a_1) 3^1 + g(a_0) 3^0$, где $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(0) = 0$ индукцией по k. База $k = 0, 1$ проверена выше. Пусть утверждение верно для натуральных чисел не превосходящих k. Рассмотрим $a_{k+1} 3^{k+1} + a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \ldots + a_1 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 3m$. Ясно, $m = a_{k+1} 3^k + a_k 3^{k-1} + a_{k-1} 3^{k-1} + \ldots + a_1 3^0$, тогда по индукционному предположению $f(m) = g(a_{k+1}) 3^k + g(a_k) 3^{k-1} + \ldots + g(a_1) 3^0$ и $3f(m) = g(a_{k+1}) 3^{k+1} + g(a_k) 3^{k-1} + \ldots + g(a_1) 3^1 + g(0) \cdot 3^0$. Два других случая доказываются аналогично. Рассмотрим уравнение $f(n) = 2n$. Ясно, что если все цифры троичной записи n есть 0 или 1, то $f(n) = 2n$. Если

же есть 2, то $f(n) < 2n$. Осталось подсчитать сколько таких чисел. Во-первых, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 < 2187$, $3^7 = 2187$. Это означает, что походят все не более, чем семизначные, таких будет $2^7 - 1 = 127$, кроме них ещё $10\,000\,000_3$, $10\,000\,001_3$, $10\,000\,010_3$, $10\,000\,011_3$, $10\,000\,100_3$, $10\,000\,101_3$, $10\,000\,110_3 = 2199_{10}$ – других нет. Всего получили 134 числа.

Математический бой № 1 (10-11 класс первая лига)

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x} = 1$. **Ответ:** корнями уравнения являются числа $-2+\sqrt{5}$ и $2+\sqrt{5}$. Сделаем подстановку $x = t^3$, преобразуем уравнение $\sqrt[3]{t^3+4} = t+1$ и возведем в третью степень $t^3 + 4 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$. Получаем равносильное исходному квадратное уравнение $t^2 + t - 1 = 0$. Его корни $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Корнями исходного уравнения будут $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 = -2+\sqrt{5}$ и $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5}$.

2. В каждом классе школы процент отличниц среди девочек выше, чем процент отличников среди мальчиков. Верно ли, что во всей школе процент отличниц среди девочек выше, чем процент отличников среди мальчиков? **Ответ:** нет, неверно. Пусть в школе два класса, в одном 29 мальчиков и одна девочка, при этом 28 из 29 мальчиков – отличники, и девочка тоже отличница. В другом классе 15 девочек и 15 мальчиков, при этом имеется ровно одна девочка-отличница, а отличников-мальчиков нет вообще. Всего в этой школе доля девочек-отличниц – 2/16, а мальчиков-отличников – 28/44.

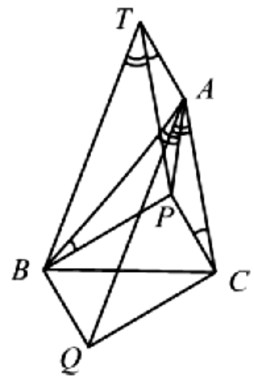
3. Докажите, что из произвольных четырех различных положительных чисел можно выбрать три числа, обозначим их A, B и C, таких, что квадратные трехчлены $Ax^2 + x + B$, $Bx^2 + x + C$ и $Cx^2 + x + A$ или одновременно имеют корни или одновременно не имеют корней. **Решение.** Обозначим $\alpha > \beta > \gamma > \delta > 0$ данные числа. Ясно, что выполняются неравенства: $\alpha\cdot\beta > \alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\gamma > \beta\cdot\delta > \gamma\cdot\delta$. Рассмотрим квадратный трехчлен $\beta x^2 + x + \gamma$. Если он имеет корни, то $1 \ge 4\beta\cdot\gamma$ и тогда $1 \ge 4\beta\cdot\gamma > 4\beta\cdot\delta > 4\gamma\cdot\delta$ что означает, выбрав в качестве чисел A, B и C числа β, γ, δ, получим квадратные трехчлены, которые имеют корни. Если же он не имеет корней, то $1 < 4\beta\cdot\gamma$ и тогда $1 < 4\beta\cdot\gamma < 4\alpha\cdot\gamma < 4\alpha\cdot\beta$. выбрав в качестве чисел A, B и C числа α, β, γ получим квадратные трехчлены, которые не имеют корней.

4. Учитель для проведения контрольной работы подготовил набор из 8 задач. Каждому школьнику выдали 3 задачи из этого набора. При этом никакие два школьника не получили более одной одинаковой задачи. Какое наибольшее возможное количество школьников могли выполнять контрольную работу? **Ответ:** 8. *Оценка*. Пусть какая-то задача оказалась у четырех школьников. Так как каждый из них должен получить еще по две различных задачи, то всего задач будет не менее 9. Противоречие. Значит, каждая из 8 задач попадет не более чем к трем школьникам. Всего задач будет

получено не более чем 24. На каждого школьника приходится по три задачи. Значит, всего школьников не более 8. *Пример*: 123, 145, 167, 247, 268, 348, 356, 578.

5. Треугольник имеет длины сторон не более чем 2, 3 и 4. Найдите максимально возможную площадь треугольника. **Ответ:** 3. Рассмотрим произвольный треугольник длины сторон, которого a, b, c, удовлетворяют условию задачи: $a \le 2$, $b \le 3$, $c \le 4$. Оценим его площадь $S = \frac{ab\sin\gamma}{2} \le \frac{2\cdot 3\cdot 1}{2} = 3$. Оценка площади достигается, когда $a = 2$, $b = 3$, $\gamma = 90°$. Заметим, что в этом случае $c = \sqrt{13} < 4$.

6. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle ABP = \angle PCA$. Точка Q такова, что $PBQC$ – параллелограмм. Докажите, что $\angle QAB = \angle CAP$. **Решение.** Выберем точку T так, что $TACP$ – параллелограмм. Так как TP и AC, PB и CQ попарно равны и параллельны, треугольники TPB и ACQ равны. Значит, $\angle QAC = \angle BTP$. Далее, $\angle ATP = \angle PCA = \angle ABP$, значит, четырехугольник $TAPB$ – вписанный. Отсюда следует, что $\angle BRP = \angle BAP$. Таким образом, $\angle QAB = \angle CAP$. (2013 British MO).



7. В телевизионной передаче «Угадай кошелек» ведущий выложил в ряд 2020 сумок с деньгами, при этом он объявлял количество денег в сумке, которую выкладывал. Двое участников походят к призовому столу по очереди и забирают любую, но одну, из сумок с деньгами, расположенную на краю ряда. Докажите, что первый из участников гарантировано может забрать не менее половины общего приза. **Решение.** Первый участник мысленно покрасил попеременно мешки в белый и черный цвет, вычислил сумму в белых мешках (белые деньги) и вычислил сумму в черных мешках (черные деньги). Он может решить взять черные деньги или белые деньги, в зависимости от того какая сумма больше. Предположим, он решил забрать домой белые мешки. На первом шаге он берет белый мешок, по краям теперь черные и второй участник возьмет черный и откроет путь к следующему белому мешку.

8. Два 25-значных числа $\overline{a_{24}a_{23}...a_0}$ и $\overline{b_{24}b_{23}...b_0}$ таковы, что при замене любой цифры a_k первого числа на цифру b_k второго числа получается число, кратное 23. Докажите, что при замене любой цифры b_k на цифру a_k тоже будет получаться число, кратное 23. **Решение.** Обозначим $A = \overline{a_{24}a_{23}...a_0}$ и $B = \overline{b_{24}b_{23}...b_0}$. Условие задачи может быть записано так: $A - a_k \cdot 10^k + b_k \cdot 10^k$ делится на 23, если k = 0, 1, …, 24. Сложим эти числа, получим $25A - A + B$ делится на 23, то есть $A + B$ делится на 23. Осталось заметить, что если k = 0, 1, …, 24, то величины $B - b_k \cdot 10^k + a_k \cdot 10^k = B + A - \left(A - a_k \cdot 10^k + b_k \cdot 10^k\right)$ делятся на 23.

Математический бой № 2 (10-11 класс первая лига)

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases}(1+x)(1+y)=4y\\(1+y)(1+z)=4z\\(1+z)(1+x)=4x\end{cases}$. **Ответ:** (1, 1, 1). ***Первое решение***.

Ясно, что $x \neq -1$. Выразим z через x: $z=\dfrac{3x-1}{x+1}$, аналогично, $y=\dfrac{3z-1}{z+1}$ и $x=\dfrac{3y-1}{y+1}$.

Подставим первое во второе, $y=\dfrac{2x-1}{x}$, затем полученное выражение подставим в третье – получим после преобразований $(x-1)^2=0$. итак, $x=1$, далее $z=1$, $y=1$. Далее проверка и ответ.

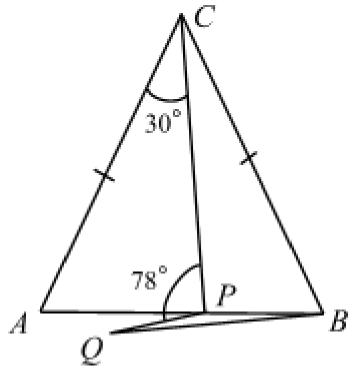
Второе решение. Если $x=0$, то из третьего уравнения получаем $z=-1$, а из второго $z=0$, противоречие. Значит, x, y, z отличны от нуля. Перемножив левые части данных уравнений, получим квадрат некоторого выражения, значит, $xyz>0$. Теперь заметим, что x, y, z больше нуля. Если $x<0$, то $y>0$, $z>0$. Кроме того, из первого и второго уравнения следует, что $(1+x)>0$ и $(1+y)>0$, значит, $4x=(1+x)(1+y)>0$, противоречие. Далее, справедливы неравенства $1+x\geq 2\sqrt{x}$, $1+y\geq 2\sqrt{y}$, $1+z\geq 2\sqrt{z}$, причем имеют место равенства тогда и только тогда, когда $x=y=z=1$. Ясно, $4y=(1+x)(1+y)\geq 4\sqrt{xy}$, $4z\geq 4\sqrt{yz}$, $4x\geq 4\sqrt{zx}$. Перемножив неравенства, получим, $64yzx\geq 64\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}=64xyz$. Это означает, что в каждом из перемножаемых неравенств имеет место равенство и $x=y=z=1$. (Индийская математическая олимпиада).

2. Пусть числа p и q удовлетворяют соотношениям $2p^2-3p-1=0$ и $q^2+3q-2=0$, $pq \neq 1$. Найдите значение $\dfrac{pq+p+1}{q}$. **Ответ:** 1. Ясно, что p и $1/q$ удовлетворяют уравнению $2x^2-3x-1=0$. По условию они различны, значит, по теореме Виета $p+1/q=3/2$ и $p\cdot 1/q=-1/2$. Отсюда $\dfrac{pq+p+1}{q}=p+1/q+p\cdot 1/q=3/2-1/2=1$.

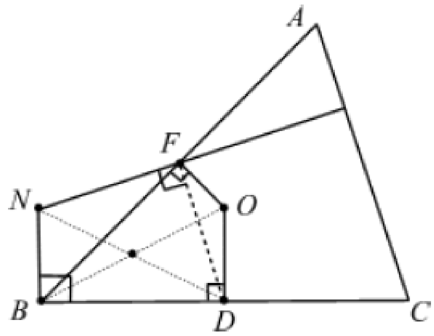
3. В вершинах куба расположили восемь первых простых чисел. Если щелкнуть по какому-нибудь ребру, то числа на его концах возрастут на 1. Можно ли так расположить числа и прощёлкать куб, чтобы все числа в его вершинах стали делиться на 29. **Ответ:** нет, нельзя. Предположим, это удалось сделать для некоторой изначальной расстановки чисел. Раскрасим вершины куба в шахматном порядке, то есть концы каждого ребра разного цвета – черного или белого. Пусть изначальная сумма чисел в белых вершинах равна W, черных B. Ясно, $B+W=2+3+5+7+11+13+17+19=77$. Можно считать, что $W>B$ (иначе поменяем цвета). Отметим, что $W-B\leq(11+13+17+19)-(2+3+5+7)=43$. Заметим, что величина $W-B$ не меняется, хоть защёлкайся. Отсюда следует, что $W-B$ делится на 29. Значит, $W-B=29$ из-за $W+B=77$, получим $B=24$. Однако минимальная четная сумма простых чисел равна $3+5+7+11=26>24$. (Сибирская математическая олимпиада НГУ).

4. Существует ли многочлен 2020-ой степени $P(x)$ для которых при всех x выполняется соотношение $x\cdot P(x-1) = (x+1)\cdot P(x)$? **Ответ:** нет, не существует. Ясно, $P(0) = 0$, подставим $x = 1$, получим, $P(0) = 2P(1)$, значит, $P(1) = 0$. Заметим далее, что если $P(n) = 0$, то, подставив $x = n$, получим $P(n+1) = 0$. Значит, все натуральные числа являются корнями многочлена $P(x)$, что невозможно для многочлена 2020-ой степени.

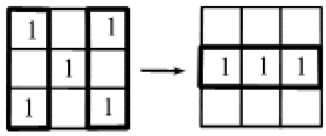
5. В равнобедренном треугольнике ABC, $AC = BC$, на стороне AB выбрана точка P ($P \neq B$), так, что $PB < PA$, при этом $\angle ACP = 30°$. Более того, нашлась точка Q такая, что $\angle CPQ = 78°$ и точки C и Q лежат по разные стороны AB. Если внутренние углы треугольников ABC и BQP исчисляются целым числом градусов, найдите возможное значение $\angle BQP$. **Ответ:** 1°. Ясно, $\angle CAB < 75°$, значит, $\angle CAB \leq 74°$ и $\angle CPA \geq 76°$. Далее, $\angle APQ = \angle PBQ + \angle BQP \geq 1° + 1° = 2°$. Таким образом, $78° = \angle CPQ = \angle CPA + \angle APQ \geq 76° + 2° = 78°$.Это означает, что в неравенствах имеют место равенства и $\angle BQP = 1°$. (Mathematical Náboj 2011).



6. Пусть ABC – остроугольный треугольник, D и F – середины сторон BC и AB соответственно. Из точки F опущен перпендикуляр на AC, от точки B восстановлен перпендикуляр к BC, перпендикуляры пересекаются в точке N. Докажите, что длина отрезка ND равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. Средняя линия DF параллельна AC и, значит, перпендикулярна отрезку FN. Отсюда следует, что четырехугольник $DFNB$ вписан в окружность с диаметром ND. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда OF и OD перпендикулярны BF и BD соответственно. Четырехугольник $DOFB$ вписан в окружность с диаметром BO. Поскольку на окружностях лежат три общие точки D, F, В эти окружности совпадают. Таким образом, $OB = ND$. (India RMO 2008).



7. Доска $n \times n$ раскрашена в шахматном порядке. Разрешается выбрать клетки на доске, образующие прямоугольник, обе стороны которого имеют четные длины или обе нечетные, кроме прямоугольника 1×1 и поменять цвета каждой клетки в этом прямоугольнике. Определите, при каких n, за конечное число шагов можно сделать все клетки доски одноцветными? **Ответ:** для любых $n \neq 2$. Ясно для $n = 1$ все клетки одноцветные. Для доски 2×2 может работать только одна операция – смена цветов во всем прямоугольнике и по две черных и белых клетки будет всегда. Будем обозначать черные клетки цифрой 1. Пусть $n = 3$. Тогда из ситуации с пятью черными клетками получим прямоугольник со всеми белыми клетками. Если в прямоугольнике пять белых клеток, то сначала поменяем цвета всех клеток прямоугольника 3×3, что разрешено. Далее, мы заметим, что используя только



разрешенные прямоугольники 1×3 и 2×2, можно поменять цвет только одной клетки доски при $n \geq 4$. На любой доске $n \times n$ при $n \geq 4$ любую клетку можно накрыть прямоугольником 3×3 так, что эта клетка не будет центральной в прямоугольнике 3×3. Можно читать, за счет поворота и симметрии, что реализуются два случая.

a	b	c
	d	e
	f	g

<u>Случай 1</u>. Меняем цвет угловой клетки a. Последовательно применим операции $\{a, b, c\}$, $\{b, d, f\}$, $\{c, e, g\}$, $\{d, e, f, g\}$. В результате применения этих (разрешенных) операций клетка a сменит цвет 1 раз, а остальные по два раза, то есть сохранят его.

	b	c
a	d	e
	f	g

<u>Случай 2.</u> Последовательно применим операции $\{a, d, e\}$, $\{b, d, f\}$, $\{c, e, g\}$, $\{d, e, f, g\}$, $\{b, c, d, e\}$. В результате клетка a сменит цвет 1 раз, клетки b, c, f, g – два раза, клетки d и e – четыре раза.

8. Натуральное число n назовем *интересным*, если найдется натуральное число, цифры которого начинаются с 2020… и это число делится на n. Например, число 11 интересное, поскольку число 20207 делится на 11: 20207 = 1837×11. Докажите, что каждое натуральное число является интересным. **Решение.** Пусть $n = \overline{ab...c}$, $m = \overline{20200ab...c}$ (за двумя нулями выписаны все цифры числа n). Рассмотрим числа m, $m + 1$, $m + 2$, …, $m + (n - 1)$. Во-первых, все они начинаются с 2020. Это следует из того, что $2n \leq \overline{1ab...c}$ и $m + (n-1) \leq \overline{20201ab...c}$. Кроме того, эти числа имеют n различных остатков от деления на n, значит, одно из них делится на n. (Brazilian Math Olympiad).

Математический бой № 3 (10-11 класс первая лига)

1. Число α является корнем уравнения $x^2 + x + 1 = 0$, вычислите значение $\alpha^{2020} + \alpha^{2021}$.
Ответ: – 1. Поскольку $\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, получаем $\alpha^3 = 1$. Далее, $\alpha^{2020} + \alpha^{2021} = \alpha \cdot (\alpha^3)^{673} + \alpha^2 \cdot (\alpha^3)^{673} = \alpha + \alpha^2 = -1$.
2. Числа a, b, c, d удовлетворяют неравенствам $48 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 108$. Определите всевозможные значения выражения $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

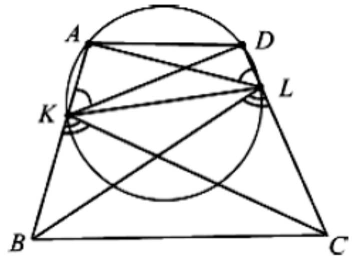
Ответ: [4/3, 2]. С одной стороны, ясно $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq 1 + 1 = 2$. С другой стороны, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{48}{b} + \frac{c}{108} \geq \frac{48}{c} + \frac{c}{108} \geq 2\sqrt{\frac{48}{c} \cdot \frac{c}{108}} = \frac{4}{3}$. Далее, если $a = 48$, $b = c = 72$, $d = 108$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{48}{72} + \frac{72}{108} = \frac{4}{3}$. Рассмотрим выражение $\frac{48}{72} + \frac{c}{108}$, если c пробегает отрезок [72, 108], то выражение $\frac{48}{72} + \frac{c}{108}$ принимает все значения из отрезка [4/3, 5/3]. Теперь рассмотрим выражение $\frac{48}{b} + \frac{108}{108}$, если b пробегает отрезок [48, 72], то выражение $\frac{48}{b}+\frac{108}{108}$ принимает все значения из отрезка [5/3, 2]. . (Сибирская математическая олимпиада НГУ).

3. Пусть a, b, c, d, e – пять последовательных натуральных чисел, при этом сумма $b + c + d$ является квадратом натурального числа, а сумма всех пяти чисел – кубом натурального числа. Найдите наименьшее возможное значение числа c. **Ответ:** 675. Ясно, $a + b + c + d + e = 5c$ и $b + c + d = 3c$. Из условия имеем $5c = n^3$ и $3c = m^2$. Отсюда следует, что n^3 делится на 5, значит, n делится на 5, $5c$ делится на 125 и c делится на 25. Далее, m^2 делится на 3, m делится на 3, m^2 делится на 9, $3c$ делится на 9, c делится на 3, $5c = n^3$ делится на 3, n делится на 3, n^3 делится на 27, c делится на 27. Итак, с делится на 27 и 25, значит и на 675. Осталось заметить, что $3\cdot 675 = 45^2$ и $5\cdot 675 = 15^3$. (Индийская математическая олимпиада).

4. M – множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению $x^2 + 2y^2 = 3$. N – совокупность прямых, заданных уравнениями $y = mx + b$. Известно, что $M \cap N \neq \varnothing$ для любых значений параметра m. Определите какие значения в этом случае может принимать параметр b? **Ответ:** $\left[-\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2\right]$. При фиксированном параметре b и произвольном m, все прямые $y = mx + b$ проходят через точку $A(0, b)$, лежащую на оси OY. Множество M пересекает ось OY в точках $B\left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ и $C\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Если точка A лежит на отрезке BC, то любая прямая $y = mx + b$ пересекает M. Если нет, то есть $|b| > \sqrt{\frac{3}{2}}$, то прямая $y = mx + b$ при $m = 0$ не пересекает M. Итак, $|b| \le \sqrt{\frac{3}{2}}$. (China).

5. Дан треугольник ABC такой, что $AB^2 - BC^2 = AC\cdot BC$. Во сколько раз угол A меньше угла C? **Ответ:** вдвое. По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos C$, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Вычтем из первого соотношения второе, после преобразований получим $BC\cdot(1 - \cos C) = AB\cdot\cos A$. Теперь воспользуемся теоремой синусов $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$ и получим соотношение $\frac{\sin C}{1-\cos C} = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{tg}(C/2) = \operatorname{tg} A$. (Иркутск, конкурс учителей)

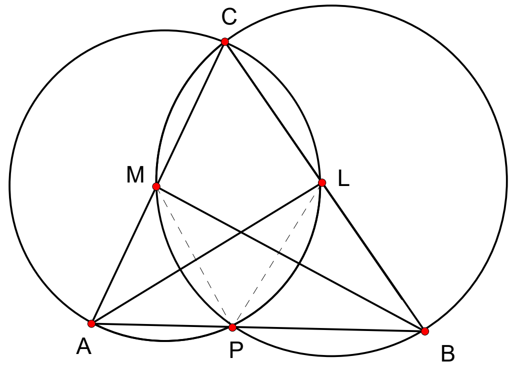
6. Точки K и L выбраны на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ так, что $\angle BAL = \angle CDK$. Докажите, что $\angle BLA = \angle CKD$. **Решение**. Во-первых, из равенства $\angle BAL = \angle CDK$ следует равенство $\angle KAL = \angle LDK$. Значит точки A, K, L, D лежат на одной окружности. Кроме того, $\angle AKD = \angle ALD$. Во-вторых, точки K, B, C, L также лежат на одной окружности. Это следует из того что углы AKL и LCB равны, так как суммы углов ADL и AKL, ADL и LCB равны по 180°. Кроме того, $\angle BKC = \angle BLC$. Из доказанного вытекает, что $\angle BLA$ = 180° – ($\angle AKD + \angle BKC$) = 180° –($\angle ALD + \angle BLC$) = $\angle CKD$. 2008 (Singapore Senior Round 2 P1).



7. В ряд стоят 100 ящиков, и есть 100 шаров с номерами до 1 до 100. В каждый ящик нужно положить ровно один шар по следующему правилу: первым кладут шар с номером 1 в любой ящик, затем шар с номером 2 кладут в один из соседних ящиков. Затем шар с номером 3 можно положить в один из соседних ящиков с теми, в которых лежат уже два шара и так далее. Сколькими различными способами можно разложить шары по ящикам? **Ответ:** 2^{99}. Проведем анализ с конца. Шар №100 может находится в одном из двух крайних ящиках (2 вариант), удалим этот ящик вместе с шаром. Шар №99 может находится в одном из двух крайних ящиках (2 вариант) и т.д. (Иркутск, конкурс учителей).
8. Назовем натуральное число *интересным*, если его десятичная запись не имеет нулевых цифр и сумма квадратов всех его цифр является квадратом натурального числа. Например, 122 и 34 интересные ($1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ и $3^2 + 4^2 = 5^2$), но 304 и 12 не интересные. Докажите, что для любого n найдется n-значное интересное число. **Решение**. Во-первых, 5, 34, 122 – интересные числа. Пусть $n \geq 4$. Тогда для некоторого $k \geq 2$ имеет место неравенство $k^2 \leq n < (k + 1)^2$. Число, состоящее из k^2 пятерок – интересное, поскольку сумма квадратов всех его цифр есть $5^2 \cdot k^2$ – квадрат натурального числа. Заметим, что если интересное число в своей десятичной записи имеет цифру 5, то эту цифру можно заменить на цифры 3 и 4, и снова получить интересное число, поскольку $5^2 = 3^2 + 4^2$, сумма квадратов всех его цифр не изменится. Проделаем последовательно такую операцию с числом, состоящим из k^2 пятерок. После того как закончатся пятерки, получим $2k^2$ – значное интересное число (из 3 и 4). Осталось заметить, что справедливо неравенство $2k^2 \geq (k + 1)^2 - 1$, $k(k - 2) \geq 0$ для любых $k \geq 2$ и $n \leq 2k^2$. (XXXIII Brazilian Math Olympiad 2011).

Математический бой № 1 (9 классы, первая лига)

1. Известно, что параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 + bx + a$ не пересекаются. Найти все возможные значения $b - a$. **<u>Ответ</u>**. $0 < b - a < 8$. **<u>Решение</u>**. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 + bx + a$ не пересекаются в том, и только том случае, если уравнение $x^2 + ax + b = -x^2 + bx + a$ не имеет действительных решений. Это равносильно уравнению $2x^2 + (a - b)x - (a - b) = 0$. Уравнение не имеет действительных решений тогда, и только тогда, когда дискриминант $D = (a - b)^2 + 8(a - b) < 0$. Отсюда $(a - b)(a - b + 8) < 0$, и $0 < b - a < 8$.
2. На окружности отметили 6 точек, и соединили их с центром окружности. Какое наибольшее количество тупых углов может быть между проведенными радиусами? (Рассматриваются все углы, меньшие 180^0, между любыми двумя радиусами). **<u>Ответ</u>**. 12. **<u>Решение</u>**. Так как каждые два радиуса образуют некоторый угол, то общее количество углов равно $6 \cdot 5 / 2 = 15$. Возьмем шесть из этих углов, образованных парами соседних радиусов. Эти углы не пересекаются и составляют в сумме 360^0, поэтому среди них не более трех тупых. Пример расположения точек, при котором получается 12 тупых углов: вершины двух правильных треугольников, один из которых получается из другого поворотом на 1^0.
3. Найти все пары (a, b) целых положительных чисел, такие, что $3b - 1$ делится на $2a + 1$, и $3a - 1$ делится на $2b + 1$. **<u>Ответ</u>**. (2;2), (12;17), (17; 12). **<u>Решение</u>**. Условие



задачи эквивалентно существованию таких неотрицательных целых чисел c и d, таких что $3b-1=c(2a+1)$ и $3a-1=d(2b+1)$, тогда $cd=\frac{3b-1}{2a+1}\cdot\frac{3a-1}{2b+1}=\frac{3a-1}{2a+1}\cdot\frac{3b-1}{2b+1}<\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=2{,}25$.
Так как c и d не равны 0, то из $cd<2{,}25$ следует, что $(c;d)\in\{(1;\,1);\,(2;\,1);\,(1;\,2)\}$.
Отсюда легко получить три решения: (2; 2), (12; 17), (17; 12).

4. Можно ли расставить по кругу несколько (не меньше трех) различных натуральных чисел так, чтобы произведение любой пары соседних чисел, увеличенное на 1, было точным квадратом? (Точным квадратом называется квадрат любого натурального числа). **<u>Ответ</u>**. Да, можно. **<u>Решение</u>**. Заметим, что для любого натурального числа a выражение $a(a+2)+1=(a+1)^2$ является точным квадратом. Расположим на круге последовательно числа 2; 4; 6… . Так как $12\cdot 2+1=25=5^2$, то набор чисел 2; 4; 6; 8; 10; 12 удовлетворяет условию задачи.

5. В треугольнике ABC провели биссектрисы AL и BM, при этом оказалось, что описанные окружности треугольников ALC и BMC пересекаются второй раз на стороне AB. Чему может равняться угол C? **<u>Ответ</u>**. $\angle C=60^\circ$. **<u>Решение.</u>** Пусть P – точка пересечения окружностей, лежащая на отрезке AB. Тогда $CL=LP;\ CM=MP;\ \angle MPL=\angle C;\ \angle APL=\angle MPB=180-\angle C.$ Отсюда $\angle APL+\angle MPB=\left(180^\circ-\angle C\right)+\left(180^\circ-\angle C\right)=180^\circ+\angle C$. В итоге, $\angle C=60^\circ$.

6. На плоскости отмечено конечное множество точек. Для некоторых пар отмеченных точек А, В построены векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой отмеченной точке начинается столько же векторов, сколько и заканчивается. Доказать, что сумма построенных векторов равна нулю. **<u>Решение</u>**. Возьмем произвольную точку O, тогда $\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{OA_j}-\overrightarrow{OA_i}$. Число векторов, заканчивающихся и начинающихся в точке A_j, одинаковое, поэтому каждый вектор $\overrightarrow{OA_j}$ в общей сумме будет встречаться одинаковое число раз со знаком плюс и со знаком минус.

7. Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то $\frac{1}{4}<\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\le\frac{1}{3}$.

<u>Решение</u>. Перепишем левое неравенство в виде $(a+b+c)^2<4ab+4bc+4ca$, или $a(a-b-c)+b(b-c-a)+c(c-a-b)<0$. Последнее неравенство очевидно. Правое неравенство перепишем в виде $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$. Это верно, так как $\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(b-c)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}\ge 0$.

8. Пусть $P(x)$ – квадратный трехчлен, удовлетворяющий при всех x условию: $x^2-2x+2\le P(x)\le 2x^2-4x+3$, и $P(11)=181$. Найти $P(16)$. **<u>Ответ</u>**. 406. **<u>Решение</u>**. Из условия, $(x-1)^2+1\le P(x)\le 2(x-1)^2+1$. Обозначим: $f(x)=P(x+1)-1$. Тогда $f(x)$ – также квадратный трехчлен, и $x^2\le f(x)\le 2x^2$, при всех x. Очевидно, что $f(0)=0$, поэтому $f(x)=ax^2+bx\ (a\ne 0)$. Покажем, что $b=0$. Пусть, напротив,

$b \neq 0$, тогда $1 \leq a + \dfrac{b}{x} \leq 2$, при всех $x \neq 0$. Рассмотрим уравнение $a + \dfrac{b}{x} = t$, тогда $x = \dfrac{b}{t-a}$. Отсюда следует, что выражение $a + \dfrac{b}{x}$ может принимать любые значения (кроме a), что противоречит условию $1 \leq a + \dfrac{b}{x} \leq 2$, при всех $x \neq 0$. Поэтому $b = 0$, $f(x) = ax^2$ и $P(x) = a(x-1)^2 + 1$. Так как $P(11) = 100a + 1 = 181$, то $a = 1{,}8$. Тогда $P(16) = 1{,}8 \cdot 15^2 + 1 = 406$.

Математический бой № 2 (9 классы, первая лига)

1. Существуют ли такие различные нечетные натуральные числа k, l и m, что выполняется равенство $\dfrac{1}{2019} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}$? **Ответ**. Да. **Решение**. Ищем решение в виде: $\dfrac{1}{2019} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{3k} + \dfrac{1}{673k}$. Отсюда $k = 2695,\ l = 3 \cdot 2695,\ m = 673 \cdot 2695$.

2. Существуют ли такие натуральные числа x, y и z (причем $x-$ нечетное), что выполняется равенство $x^2 + y^2 = z^3$? **Ответ**. Да. **Решение**. Пусть $a^2 + b^2 = c$, отсюда $(ac)^2 + (bc)^2 = c^3$.

3. Пусть $a_1, a_2, b_1, b_2 -$ четыре различных числа. Составим таблицу:

$a_1 + b_1$	$a_1 + b_2$
$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$

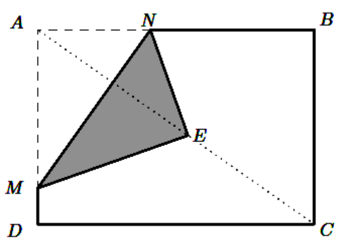
Известно, что произведение чисел в каждом столбце равно 1. Докажите, что произведение чисел в каждой строке равно -1.

a	b
c	d

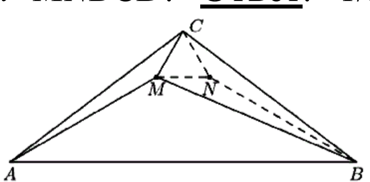
Решение1. Заметим, что любая таблица, удовлетворяющая условиям задачи, может быть записана в следующем виде: (где $a, b, c, d -$ произвольные различные числа, удовлетворяющие условию: $a + d = b + c$). Тогда из условия задачи $c = 1/a, d = 1/b$ и $a + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{1}{a}$, или $(a-b)\left(1 + \dfrac{1}{ab}\right) = 0$. Так $a \neq b$, то $ab = -1$. Аналогично можно показать, что $cd = -1$. **Решение**2. Из условия следует тождество $(a_1 + x)(a_2 + x) - 1 = (x - b_1)(x - b_2)$, из которого, после замены x на $-x$, получается решение задачи.

3	5	4	6	3	5
5	4	6	3	5	4
4	6	3	5	4	6
6	3	5	4	6	3
3	5	4	6	3	5
5	4	6	3	5	4

4. Можно ли в клетках таблицы 6×6 расставить натуральные числа так, чтобы в любом прямоугольнике 4×1 сумма чисел была четна, а сумма всех чисел в таблице была нечетна? **Ответ.** Можно. **Пример**.



5. Лист бумаги (формата А4) имеет вид прямоугольника с отношением сторон $1:\sqrt{2}$. Часть листа перегнули (по прямой линии) так, что точки A; E и C лежат на одной прямой, и длина линии сгиба MN равна длине стороны AD. Найти отношение площади треугольника MNE к площади пятиугольника $MNBCD$. **Ответ**. 1/5. **Решение**. Обозначим через O точку пересечения отрезков AC и MN. Треугольники ABC и MAN прямоугольные из условия, треугольник AON также



прямоугольный (из равенства треугольников AON и NOE). Треугольники ABC и AON подобны, так как имеют общий угол BAC , треугольники AMN и AON подобны, так как имеют общий угол ANM. Отсюда треугольники ABC и AMN подобны. По теореме Пифагора можно найти соотношение гипотенуз: $\frac{MN}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому отношение площадей $\frac{\Delta MAN}{\Delta ABC} = \frac{1}{3}$. Из этого следует, что треугольник MAN имеет площадь, равную 1/6 от площади прямоугольника $ABCD$; но треугольник MNE имеет ту же площадь, и поэтому искомое отношение равно $\frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}$.

6. Треугольник ABC равнобедренный, $AC = BC$ и $\angle ACB = 106^0$. Точка M находится внутри треугольника, так что $\angle MAC = 7^0$ и $\angle MCA = 23^0$. Найдите величину $\angle CMB$ (в градусах). **Ответ**. 83^0. **Решение**. Возьмем точку N внутри треугольника ABC так, что $\angle CBN = 7^0$ и $\angle BCN = 23^0$. Тогда, $\angle MCN = 106^0 - 2 \cdot 23^0 = 60^0$. Кроме этого, поскольку треугольники AMC и BNC равны (по стороне и двум углам), то $CM = CN$. Поэтому треугольник $CMN -$ равносторонний, и $\angle CNM = 60^\circ$. Поэтому $\angle MNB = 360^0 - \angle CNM - \angle CNB = 360^0 - 60^0 - 150^0 = 150^0$. Отсюда следует, что треугольники MNB и CNB равны. Поэтому, $CB = MB$, и $\angle CMB = \angle MCB = 83^\circ$.
7. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4}$, если $x + y = 4$ $(x \geq 0, y \geq 0)$. **Ответ**. 5. **Решение**. Возьмем отрезок AB с длиной, равной 4. На отрезке отметим тоску C так, что $|AC| = x$. Из точек A и B отложим отрезки AM и BN, перпендикулярные AB, с длинами $|AM| = 1$ и $|BN| = 2$ (точки M и N расположены с разных сторон от прямой AB). Тогда значение выражения $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2+4}$ равно длине ломаной MCN. Наименьшая возможная длина MCN будет в случае, если $C -$ точка пересечения отрезков AB и MN. Тогда, из подобия треугольников ACM и BCN, легко получить, что минимум данного выражения достигается при $x = 4/3$, и равен 5.
8. За круглым столом сидят 30 учеников. Каждый из них либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что среди двух соседей каждого лжеца есть ровно один лжец. При опросе 12 из учеников показали, что ровно один из их соседей – лжец, остальные сказали, что оба соседа – лжецы. Сколько лжецов сидит за столом? **Ответ.** 16. **Решение.** Из условия следует, что лжецы сидят по двое подряд, а значит, их четное число. Очевидно, что 12 человек, сказавших, что ровно один из их соседей лгун – честные. Причем эти 12 человек сидят шестью парами, так как у каждого из них ровно один честный сосед. Этим шести парам честных людей соответствует шесть пар лжецов (например, если зафиксировать какую-либо пару честных учеников и начать «двигаться» от нее по часовой стрелке, то за каждой парой честных будет следовать пара лжецов. Причем оставшиеся честные обязаны иметь обоих соседей лжецов (в противном случае заявивших во время опроса, что ровно один из соседей – лгун, было бы более 12). Рассмотрев возможные случаи, получим, что всего лжецов – 16.

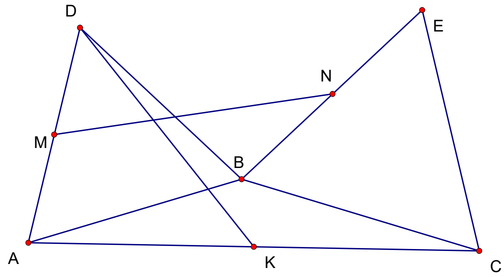
Математический бой № 3 (9 классы, первая лига)

1. Найти наибольшее натуральное число, не представимое в виде суммы двух составных натуральных чисел. **Ответ**. 11. **Решение**. Сначала заметим, что любое четное число, не меньшее 8, является суммой двух четных чисел. Нечетные числа могут быть представлены в виде: $2n+1=(n-1)+(n+2)=(n+1)+n=(n+3)+(n-2)$. Очевидно, что для любого $n\,(n\geq 3)$, в каждой паре слагаемых числа разной четности, и из трех нечетных слагаемых одно делится на 3. Поэтому, если наименьшее из нечетных слагаемых больше 3, то есть $n-2>3$ (или $n>5$), то нечетное число $2n+1$ является суммой двух составных чисел. Так как $11=2+9=3+8=4+7=5+6$, то это число и является решением задачи.
2. Пусть $S-$площадь треугольника со сторонами a,b и c. Докажите неравенство: $S<\frac{\pi}{8}(a^2+b^2+c^2)$. **Решение**. Построим на сторонах треугольника, как на диаметрах, полукруги вовнутрь треугольника. Покажем, что весь треугольник будет накрыт объединением этих фигур. Предположим, напротив, что существует точка в треугольнике, которая не накрыта ни одним полукругом. Соединим эту точку с вершинами треугольника. Получаем три угла, которые в сумме дают 360^0. По крайней мере один из этих углов тупой, поэтому выбранная точка накрыта соответствующим полукругом. Из этого следует, что общая площадь полукругов больше площади треугольника, так как любые два полукруга имеют пересечение ненулевой площади.
3. Доказать, что нельзя разбить квадрат *ABCD* на 9 равновеликих треугольников, все вершины которых лежат на сторонах *AB* и *CD*. **Решение**. Если такое разбиение возможно, то площадь каждого треугольника равна $a^2/9$, где $a-$ сторона квадрата. Выберем в качестве оснований этих треугольников их стороны, лежащие на сторонах *AB* и *CD* квадрата. Тогда высота каждого треугольника, опущенная на основание равна стороне квадрата a, а поэтому основание каждого треугольника равно $2a/9$. Если k таких оснований $(1\leq k\leq 9)$ умещается на стороне *AB* квадрата, то $a=2ak/9$. Но таких целых k не существует, поэтому разбиение невозможно.
4. На доске 4×4 играют двое. Каждый по очереди закрашивает одну клетку доски. Выигрывает тот, после чьего хода получится квадрат 2×2, состоящий из закрашенных клеток. Кто выигрывает при правильной игре? **Ответ**. Выиграет второй. **Решение.** Разделим вертикальной линией эту доску на две равные части. Второй должен ходить так: закрашивать квадрат в той же горизонтали на той же половине доски, где закрасил первый. Докажем, что при такой стратегии второй всегда выигрывает. Если квадрат образуется в одной половине, то ясно, что это случится после хода второго. Если же квадрат образуется на границе двух половин доски после хода первого, то перед этим образованием на одной из половин доски в соседних горизонталях есть две закрашенные клетки, а значит на этой половине есть закрашенный квадрат.
5. Пусть p и $q-$ два последовательных простых числа, не равные 2. Докажите, что $p+q$ является произведением как минимум трех простых чисел (не обязательно различных). **Решение**. Очевидно, что $p+q=2(p+q)/2$, причем $(p+q)/2-$целое число, и $p<(p+q)/2<q$. Так как p и $q-$ последовательные простые числа, то $(p+q)/2-$составное.

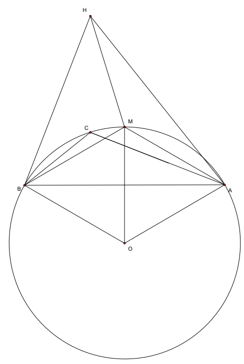
6. Пусть $\{x_1,x_2,...,x_{20}\}-$некоторая перестановка множества чисел $\{1,2,3,...,20\}$. Найти наибольшее возможное значение выражения: $|x_1-1|+|x_2-2|+|x_3-3|+\ldots+|x_{20}-20|$.

Ответ. 200. **Решение**. «Раскроем» все модули. Получим 40 слагаемых, состоящих из удвоенного набора чисел , причем 20 из них со знаком «+», и 20 – со знаком «–». Наибольшая возможная сумма получится, если со знаком «+» будут 20 наибольших чисел, то есть $2(20+19+...+11-10-9-...-1)=200$. Этот набор знаков достигается, например, если $x_i = 21-i$, $1 \le i \le 20$.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники ABD и BCE. Пусть точки M, N и K – середины отрезков AD, BE и AC, соответственно. Доказать, что $MN = DK$. **Решение**. Заметим, что $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$, $2\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$. При этом все векторы первой суммы при повороте на 60 градусов по часовой стрелке дают векторы второй суммы. Следовательно, вектор $\overrightarrow{DK}$ получается из вектора $\overrightarrow{MN}$ поворотом на 60 градусов по часовой стрелке. Следовательно, длины этих векторов равны, и $MN = DK$.



8. В треугольнике ABC $\angle ACB = 120^0$. Обозначим через H точку пересечения высот треугольника, через O – центр описанной окружности, через M – середину дуги ACB описанной окружности. Доказать, что $HM = MO$. **Решение**. Ясно, что $\angle AOB = 120^\circ$ и $\angle AHB = 60^\circ$. Точки H и O лежат по разные стороны от AB (так как M и H лежат в одной полуплоскости от прямой AB, а точки M и O в разных полуплоскостях от этой прямой). Поэтому точки A, O, B и H лежат на одной окружности с центром в точке M. Отсюда $HM = MO$.



7-8 классы, первый тур, ответы, указания, решения

1. Найдите все решения ребуса ДОСКА+ДОСКА=СКЛАД (разные буквы обозначают разные цифры).

Ответ. 40812+40812=81624, 45912+45912=91824, 41837+41837=83674, 46937+46937=93874.

Число КА+КА-АД=20К-8А-Д равно 0 или 100. Ясно, что Д<5, отсюда Д равно 4. Из условий 20К-8А-4=0 получим А=2, К=1 либо А=7, К=3. Из 20К-8А-4=100 получим А=2, К=6 либо А=7, К=8. Также С>=8 и поэтому К нечетна. Далее простым перебором получаем ответ.

2А. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

Решение. Пусть BK - биссектриса угла B при основании BC равнобедренного треугольника ABC. Через точку K проведём прямую, параллельную основанию BC. Пусть M — точка пересечения этой прямой с боковой стороной AB. Тогда $\angle MKB$ = $\angle CBK$ = $\angle MBK$. Поэтому треугольник BMK — равнобедренный. Следовательно, KC = BM = MK, а так как $\angle AKM$ = $\angle ACB$ и AK = BC, то треугольники CBK и KAM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, треугольник KBC равнобедренный, т. е. $BK = BC$.

2Б. Три одинаковых треугольника разрезаны по разным медианам (медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника и середину противоположной стороны). Сложите из шести полученных кусков один треугольник.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC. На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда треугольник BMD равен треугольнику CMA, а треугольник ABD составлен из треугольников, на которые медиана AM разбивает треугольник ABC. Аналогично для двух других медиан. Из трёх полученных таким образом треугольников, располагая их так, как показано на рисунке, составим треугольник.

3. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 23 × 23. Вася разбил его на квадраты 1 × 1, 2 × 2 и 3 × 3 (каких-то видов может и не быть). Какое наименьшее количество квадратов 1 × 1 мог получить Вася?

Ответ: один. Заметим, что совсем без квадратов 1 × 1 обойтись не удастся. Действительно, предположим противное и поставим в клетках столбцов с нечетными номерами -1, а с четными +1. Общая сумма будет равна 23, а сумма в каждом квадрате 2 × 2 и 3 × 3 будет делиться на 3 противоречие. Одного квадрата 1 × 1 достаточно. Поместим его в центр, остаток естественным образом разбивается на 4 прямоугольника 11 × 12, каждый из которых в свою очередь разбивается на один прямоугольник 3 × 12 и 4 прямоугольника 2 × 12, а их уже легко разбить на квадраты 3 × 3 и 2 × 2 соответственно.

4. Докажите, что среди участников турнира юношей больше, чем девушек на столько же процентов, на сколько процентов это число процентов больше числа процентов, на которое девушек меньше, чем юношей. **Решение**. Пусть в турнире участвуют m юношей и n девушек. Тогда юношей больше девушек на $a = \frac{m-n}{n} \cdot 100\%$, а девушек меньше, чем юношей, на $b = \frac{m-n}{m} \cdot 100\%$. Число a больше b на

$$\frac{a-b}{b} \cdot 100\% = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{m}{n} - 1\right) \cdot 100\% = a\%$$

5А. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство $(x-8)(x-10) = 2^y$. **Решение.** Числа |x-8| и |x-10| – степени двойки с неотрицательным целым показателем и они отличаются на 2, отсюда это 2 и 4. Получаем варианты: x-10=2, x-8=4, то есть x=12, x-8=-2, x-10=-4, то есть x=6.

5Б. Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых выполнено равенство $xy = x + y - 2$. **Решение.** Приведем равенство к виду $(x-1)(y-1) = -1$, отсюда сомножители равны 1 и -1 или -1 и 1. Отсюда x=2, y=0 либо x=0, y=2.

6. В стране 15000 почтовых отделений, каждое из которых имеет шестизначный почтовый индекс. Типичная ошибка при написании индекса состоит в такой записи цифр, что каждая цифра написана либо на своем месте, либо на соседнем месте. Можно ли так присвоить индексы почтовым отделениям, чтобы по любому индексу, написанному с типичными ошибками, можно было бы однозначно восстановить правильный индекс? **Решение.** Рассмотрим индексы, в которых на нечетных местах стоят нечетные цифры, а на четных местах четные. Таких индексов $5^6>15000$. Заметим, что у верного индекса и записи этого индекса с типичными ошибками совпадают взаимные расположения четных цифр, поэтому последовательность четных цифр однозначно восстанавливается. То же самое верно для нечетных цифр.

7. Дана клетчатая бумажная полоска $2\times n$, склеенная в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают из полоски по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется, проигрывает. При каких n имеет выигрышную стратегию начинающий, а при каких - его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными. **Ответ:** если n четное, то выиграет второй, если n нечетное — первый. Рассмотрим сначала случай четного n. Второй игрок мысленно разобьет каждый слой на доминошки, сместив разбиение на одну клетку (“кирпичиками”). Теперь на каждый ход первого игрока он будет отвечать ходом в ту же доминошку. Нетрудно видеть, что такая стратегия позволяет всегда иметь ход. Так как игра конечная, то такая стратегия приведет второго игрока в выигрышу. Если же n — нечетное, то выиграет первый. После первого хода вырезанная им клетка “запрещает” ходить в три соседние с ней клетки другого ряда. Остаток (без вырезанной и запрещенных клеток) разбивается на доминошки точно так же. Стратегия, аналогичная описанной выше, на этот раз приводит к победе первого игрока.

8. Собрались n человек, каждые k ($n>k$) из которых имеют ровно одного общего друга среди остальных n-k. Найдите все пары n и k, при которых это возможно. В некоторых лигах задача предложена в частных случаях (k=2,3). **Ответ**: для пар (m+1, m), (2m+1, 2), (2m, 1). Если $n=k+1$, то условие выполняется. Покажем, что при $k>2$ условие $n=k+1$ является необходимым. Пусть некоторый человек A_1 дружит с A_2. У A_1 и A_2 найдется общий друг A_3, у A_1, A_2 и A_3 найдется общий друг A_4, и т.д., получим группу из (k+1) людей, которые попарно дружат. Если $n\geq k+2$, то найдется человек A_{k+2}, имеющий среди A_1, A_2, ..., A_{k+1} не более одного друга (в самом деле, если бы A_{k+2} дружил, например, с A_1 и A_2, то k человек - A_3, ..., A_{k+1}, A_{k+2} имели бы двух общих друзей). Пусть, для определенности, A_{k+2} не дружит ни с A_1 ни с и A_2. Тогда общим другом для A_3, ..., A_{k+1}, A_{k+2} является некто A_{k+3} и тогда A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_{k+3} дружат с A_k, A_{k+1} – противоречие.

Остается рассмотреть случаи k=1, k=2.

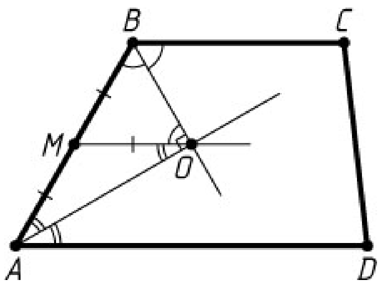
Пусть k=1. Тогда каждый имеет ровно одного друга, а все собравшиеся разбиваются на пары друзей. Это возможно тогда и только тогда, когда n четно.

Пусть k=2. Тогда у каждого человека четное число друзей. Рассмотрим человека A, пусть $F_A=\{B_1,...,B_m\}$ – множество всех его друзей. Тогда B_i имеет ровно одного общего с A друга в множестве F_A Этот общий друг является единственным для B_i в множестве F_A другом. Значит, элементы F_A разбиваются на пары и m четно.

Обозначим через F_{Bi} множество друзей человека B_i Поскольку A входит в каждое из этих m множеств, а каждый из остальных n-1 собравшихся – ровно в одно, то $n-1=\sum_{i=1}^{m}\left(\left|F_{Bi}\right|-1\right)$. Числа в скобках нечетны, m четно и отсюда n нечетно. Пары (n, 2) подходят, это следует, например, из возможности равенства $n=m+1$

7-8 классы, второй тур, ответы, указания, решения

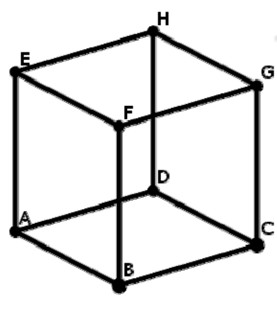
1А. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на средней линии. **Решение.** Пусть O — точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне AB трапеции ABCD, M — середина AB. Поскольку биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны, то $\angle AOB = 90^o$. Отрезок OM — медиана прямоугольного треугольника AOB, проведённая к гипотенузе. Поэтому OM = MB = MA, $\angle MOB = \angle OBM = \angle OBC$. Следовательно, OM ∥ BC. Значит, точка O принадлежит средней линии трапеции.



1Б. Тройку точек плоскости назовем интересной, если одна из точек тройки лежит точно посередине отрезка, соединяющего две оставшиеся. Как отметить несколько узлов на клетчатой плоскости, чтобы каждый из них входил ровно в две хорошие тройки? **Решение**. Отметим все 12 вершин клеток, лежащих на сторонах клетчатого квадрата размером 3×3. Тогда каждая из отмеченных точек входит ровно в две хорошие тройки. Возможны другие примеры.

2. Докажите, что найдется простое число p, большее миллиона, для которого сумма p+2020 – составное число. **Решение**. Возьмем простое число p, большее миллиона. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда числа p+2020, p+2·2020, ..., p+n·2020 – простые при всех натуральных n. Но тогда число $p + p \cdot 2020 = p \cdot 2021$ также простое, что неверно.

3. Руслан расставляет в некоторые клетки доски 2×2 по одной фишке и сообщает Денису, сколько фишек находится в первом столбце, во втором столбце, в первой строке, во второй строке. Например, если Руслан ставит фишки в два противоположных угла доски, он сообщает числа 1, 1, 1, 1. Сколькими способами Руслан может расставить фишки на доске так, чтобы Денис по полученной информации в каждом случае смог бы однозначно восстановить расположение фишек? **Решение.** Без ограничения общности можно считать, что Руслан расставляет от 0 до 2 фишек (иначе переходим к дополнению, т.е. восстанавливаем пустые клетки). Очевидно, что если 0 или одна фишка, то расположение однозначно восстанавливается – таких вариантов 5. Если расставлены две фишки, то либо они стоят в одной строке (столбце) и тогда их расположение однозначно восстанавливается и таких вариантов 4, либо они стоят по диагонали и расположение не восстанавливается. Всего вариантов 5+4+5=14. **Критерий.** Пропущены варианты с нулями – минус 2 балла.



4. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди красят ребра куба в красный цвет. На каждом шаге можно покрасить ребро в красный цвет, если оно имеет общую вершину с ребром, покрашенным на предыдущем ходу. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Петя. Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию и предъявите эту стратегию. **Решение**. Выигрышную стратегию имеет Вася. Заметим, что ребра куба разбиваются на пары имеющих общую вершину (AE, EH), (DH, HG), (CG, GF), (BF, FE), (BA, AD), (DC, CB). На ход Пети Вася отвечает покраской парного ребра. **Критерий.** Нет явно описанной стратегии – 0 баллов.

5А. Ненулевые числа a, b, c удовлетворяют равенствам: $a^2 - b^2 = bc, b^2 - c^2 = ac$. Докажите, что $a^2 - c^2 = ab$. **Решение.** Поделим каждое равенство на c^2 и обозначим

$\frac{a}{c}=x, \frac{b}{c}=y$. Получим: $x^2-y^2=y, y^2-1=x$ и надо доказать, что $x^2-1=xy$. Достаточно доказать, что $xy=x+y$. Из первого равенства $x\cdot\frac{x}{y+1}=y$, из второго $\frac{x}{y+1}=y-1$, тогда $x(y-1)=y$, что и требовалось. Условие $y+1\neq 0$ вытекает из равенства $x^2=y^2+y$, так как $x\neq 0$ по условию. **Критерий**. Не проверено, что $y+1\neq 0$ или эквивалентное условия, обеспечивающее корректность деления – дыра в 4 балла.

5Б. Из клетчатого квадрата вырезали по линиям клеток квадрат поменьше. Могло ли остаться 102 клетки? **Решение.** Не могло. Пусть из квадрата со стороной n вырезали квадрат со стороной m. Тогда осталось $n^2–m^2$ клеток. Заметим, что квадрат натурального числа при делении на 4 может давать в остатке 0 или 1, поэтому разность квадратов при делении на 4 может давать остатки 0, 1, 3. Но число 102 при делении на 4 дает в остатке 2.

6. На координатной прямой отмечено несколько различных отрезков. Концы отрезков находятся в целых точках от 0 до 20. Оказалось, что если один из отрезков содержится в другом, то у них совпадает один из концов. Какое наибольшее количество отрезков могло быть отмечено? **Решение.** Ответ: 39. Оценка. Сопоставим каждому отрезку $[i, j]$ его вес $i + j$. Тогда разные отрезки не могут иметь одинаковые веса. Действительно, два отрезка могут иметь одинаковые веса только в том случае, когда один содержится в другом, но тогда по условию у них есть общий конец, и из совпадения весов вытекает совпадение других концов. Итак, отрезков не больше, чем вариантов весов, то есть не больше, чем количество чисел от 0+1 до 19+20, которое равно 39. Пример. Рассмотрим все отрезки с концами в точке 0 и все отрезки с концами в точке 20. **Критерий.** Ответ: 2 балла. Пример: 2 балла. Оценка: 8 баллов.

7. Все ученики 9Б класса ежедневно используют WhatsApp для передачи сплетен по своим контактам. Известно, что для любой пары учеников номер ровно одного из них записан в контактах у второго. Ежедневно каждый ученик класса придумывает какую-нибудь новую сплетню и пересылает ее по всем своим контактами вместе со всеми сплетнями, которые он получил от других в предыдущий день. Таня в среду не получила обратно сплетню, придуманную ей в понедельник. Докажите, что в классе есть сплетни, которые доходят не до всех.

Решение. Все ученики класса, кроме Тани, разбиваются на два непересекающихся множества: X – множество учеников класса, от которых Таня получает сплетни, и Y-множество учеников, которые получают сплетни от Тани. Если какой-нибудь ученик из множества Y передавал сплетни кому-либо из X, то Таня получила бы в среду свою сплетню обратно. Значит, либо Y пусто, то есть сплетни Тани никто не получает, либо никто из X, а также Таня не получают сплетни из Y, то есть эти сплетни не доходят до всех. **Критерий.** Пропущен случай, когда Y пусто – дыра в 4 балла.

8. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

Решение. Да, всегда. Во-первых, периметр многоугольника четен. Во вторых, заключим многоугольник в наименьший возможный прямоугольник со сторонами по линиям сетки. Каждый единичный отрезок с концами в узлах сетки, лежащий на границе этого прямоугольника, параллельно сдвинем в направлении многоугольника так, чтобы он перешел в отрезок границы многоугольника. Тогда каждому единичному отрезку границы прямоугольника будет сопоставлен уникальный отрезок границы исходного многоугольника. Значит, периметр прямоугольника не больше периметра исходного многоугольника. Последовательно увеличивая на 1 одну из сторон прямоугольника, получим требуемое.

Критерий: не доказано или неверно доказано, что периметр объемлющего прямоугольника не больше, чем периметр исходного многоугольника – дыра в 8 баллов. Замечено только, что периметр многоугольника четен – 2 балла.

7-8 классы, третий тур, ответы, указания, решения

1А. Известно, что $\frac{3x-4y}{x-y}=2\ \left(x\neq\pm y\right)$. Найдите значение выражения $\frac{9x^2-16y^2}{x^2-y^2}$.

Решение. Из данного в условии равенства получаем, что $3x-4y=2x-2y$ или $x=2y$. Подставим в выражение, получим, что его значение равно $\frac{20}{3}$.

1Б. Докажите, что если любое двузначное число написать три раза подряд, то получится шестизначное число, кратное 21. **Решение.** $\overline{xyxyxy}=\overline{xy}\cdot 10101$, а число 10101 делится на 21. **Критерий.** Частные случаи – 0 баллов.

2А. Дан выпуклый n-угольник, все углы которого тупые. Докажите, что сумма его диагоналей больше периметра. **Решение.** Пусть A, B и C – произвольные последовательные вершины такого многоугольника. Тогда диагональ AC – сторона треугольника ABC, лежащая против тупого угла, значит, $AC > AB$. Таким образом, каждой стороне многоугольника соответствует диагональ, большая этой стороны, причём, разным сторонам соответствуют разные диагонали. Тогда сумма только этих диагоналей больше периметра многоугольника. **Критерий.** Рассуждения на конкретном n-угольнике, которые проходят в общем случае без привлечения дополнительных идей – 12 баллов.

2Б. Нарисуйте на плоскости шесть прямых так, чтобы они пересекались ровно в шести различных точках. **Указание.** Проверить пример. Проверьте, нет ли точек пересечения прямых за пределами чертежа. Если есть, их тоже надо учесть! Один из примеров: пять прямых, проходящих через одну точку и шестая прямая, пересекающая эти пять в разных точках.

3. Внутри квадрата со стороной 1 расположено 1009 точек. Докажите, что площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках или в вершинах квадрата не превосходит $\frac{1}{2020}$. **Указание.** Оценка площади для n точек: $1/(2n+2)$

Решение. Пусть P_1, P_2, …, P_{1009} – данные точки. Соединим точку P_1 с вершинами квадрата. При этом получится 4 треугольника. Затем для $k = 2, 3, \ldots, 1009$ проделаем следующую операцию. Если точка P_k лежит строго внутри одного из полученных ранее треугольников, то соединим её с вершинами этого треугольника. Если P_k лежит на общей стороне двух треугольников, то соединим её с вершинами этих треугольников, противолежащими общей стороне. После каждой такой операции в обоих случаях число треугольников увеличивается на 2. В результате получится 2(1009 + 1)=2020 треугольников. Сумма их площадей равна 1. Поэтому площадь одного из них не превосходит $\frac{1}{2020}$.

4. Таня задумала двузначное число. При этом она сообщила трём своим друзьям Пете, Васе и Коле следующее:
"это число то ли кончается на 5, то ли делится на 7";
"это число то ли больше 20, то ли кончается на 9";
"это число то ли делится на 12, то ли меньше 21".
Всё, сказанное Таней, – правда. Помогите Пете, Васе и Коле найти число.

Ответ: 84. **Решение.** Допустим, это число кончается на 5. Тогда оно не может кончаться на 9, и, значит, больше 20. Так как целое число, большее 20, не может быть меньше 21, искомое число делится на 12. Но число, делящееся на 12, четно, и потому не может оканчиваться на 5. Противоречие. Значит, искомое число делится на 7. Единственное двузначное число, делящееся на 7 и оканчивающееся на 9 – это 49. Но число 49 не делится на 12 и больше 21. Противоречие. Поэтому искомое число больше 20 и делится на 12. Единственное двузначное число, делящееся на 7 и 12 – это 84.

5. Докажите, что можно выписать 2020 подряд идущих натуральных чисел, среди которых окажется ровно 20 простых. **Решение.** Рассмотрим ряд из первых 2020 натуральных чисел, в нем более 20 простых. С другой стороны, натуральный ряд содержит 2020 последовательных составных чисел (например, 2021!+2, 2021!+3, ..., 2021!+2021). Будем последовательно добавлять в ряд первых 2020 натуральных чисел число, следующее за максимальным, и убирать минимальное. На каждом шаге количество простых чисел в текущем диапазоне изменяется не более чем на 1. Вначале их было более 20, а когда мы дойдем до 2021!+2, ..., 2021!+2021, их количество станет равным нулю. Значит, был момент, когда было ровно 20 простых.

6. Гусеница имеет 8 конечностей и носит 8 одинаковых носков и 8 одинаковых сапог. Чтобы обуться, гусенице нужно надеть носок на конечность раньше сапога, но не обязательно его надевать непосредственно перед сапогом. Сколькими способами гусеница может обуться (разными считаются способы, отличающиеся порядком ног)?

Решение. Если бы мы разрешили носки и сапоги надевать на ногу в любом порядке, получилось бы 16! способов. Для каждой из ног имеется ровно половина из вышеперечисленных способов, в которых носок надет на сапог. Значит, всего способов корректного обувания $\frac{16!}{2^8}$.

7. Монеты, сложенные в две кучи, собрали и разложили в три кучи. Докажите, что не менее двух монет оказались в меньших кучах, чем те, в которых они лежали раньше.

Решение. Пусть наибольшая из трех новых куч больше наибольшей из двух старых. Тогда каждая из двух оставшихся новых куч меньше любой из двух старых, и все монеты в этих двух новых кучах (а их там не меньше двух) – искомые. Если же наибольшая из трех новых куч меньше наибольшей из двух старых, то в кучи с меньшим числом монет после перекладывания попали все монеты из старой наибольшей, а там их было не меньше двух (так как всего монет не меньше трех).

8. У Тани имеется 14 монет, из которых ровно одна фальшивая (но неизвестно, тяжелее она или легче настоящей). Одноклассники подарили Тане еще одну, заведомо настоящую монету. Как Тане за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету (при этом определять, легче она или тяжелее, не обязательно)?

Решение. Первым взвешиванием положим на чаши весов по 5 монет (в том числе на одну из чаш положим нормальную монету). Случай А. Весы остались в равновесии. Значит, все монеты на весах – нормальные, а для определения одной фальшивой монеты из пяти у нас есть два взвешивания. Случай Б. Если же одна из чаш перевесила, то мысленно «склеим» каждую монету с левой чаши с одной монетой с правой чаши. Для определения одной фальшивой «склеенной» монеты из пяти у нас тоже осталось два взвешивания.

Итак, есть пять подозрительных монет a, b, c, d, e (в случае Б – пять «склеенных» монет, причем будем считать, что «склеенная» монета e содержит одну подозрительную и одну заведомо нормальную монету) и нормальная монета n (после первого взвешивания мы знаем еще как минимум 5 заведомо нормальных монет). Вторым взвешиванием положим на левую чашу a+b, а на правую – c+n. Если весы остались в равновесии, то третьим взвешиванием кладем на весы d и n. Если перевесила левая чаша (случай, когда перевесила правая чаша, симметричен), то это означает, что либо фальшивая монета – одна из a и b, притом она тяжелее нормальной, либо фальшивой является монета c, и она легче нормальной. Третьим взвешиванием сравним a и b. Если одна из чаш перевесит, то монета на этой чаше и является фальшивой, а если чаши останутся в равновесии, то фальшивой является c. Заметим, что во всех вариантах, кроме одного (a+b=c+n, d=n) нам удалось не только определить фальшивую монету, но и сказать, легче ли она нормальной или тяжелее. Это значит, что для каждой из «склеенных» монет, кроме монеты e, мы можем сказать, какая именно из ее частей является фальшивой. А склеенная монета e содержит только одну подозрительную часть, так что и в этом случае мы можем определить фальшивую монету.