# 3 день, ответы, указания, решения

## 7-8 классы

1. В ряд стоят 2019 стаканов, один вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально стакан, стоящий вверх дном, если оказалось, что такими операциями удалось поставить все стаканы вверх дном.

Частные случаи:

В ряд стоят 5 стаканов, один вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально стакан, стоящий вверх дном, если оказалось, что такими операциями удалось поставить все стаканы вверх дном.

В ряд стоят 9 стаканов, стакан в центре стоит вверх дном, остальные вниз дном. За один ход можно выбрать любой стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (или одного соседа, если стакан крайний). Как такими операциями поставить все стаканы вверх дном?

Пронумеруем стаканы от 1 до 2019 по порядку. Пусть $a_1 < a_2 < . . . < a_k$ номера стаканов, стоящих вверх дном. Рассмотрим знакопеременную сумму $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + . . . + (-1)^{k+1}a_k$. При операциях с не крайними стаканами она не меняется, при операции со стаканом 2019 меняется на 2020, при операции со стаканом 1 меняет знак. В конце она должна стать равна 1010, значит, вначале она должны была быть кратна 1010. Это возможно только для среднего стакана. Пример, как все становятся вверх дном (проводим операции с 1010; 1009, 1011; 1008, 1010, 1012; . . .).

2. (все лиги) В клетках таблицы 8 х 8 написаны +1 и –1 так, что в любом квадрате 2 х 2 сумма написанных чисел оказалась равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

Рассмотрим две соседние строчки. В них либо числа на четных местах совпадают, а на нечетных различны, либо наоборот. Поэтому у каждой строчки все числа на четных местах либо совпадают с числами первой строчки, либо противоположны. Аналогично, на нечетных. Таким образом, существует всего 4 различных вида строчек, поэтому какие-то две повторятся.

3. Клетчатый квадрат со стороной 101 разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Докажем, что найдётся прямоугольник, длина и ширина которого – числа одинаковой чётности, тогда его периметр будет делиться на 4. Предположим, что это не так, то есть у каждого из прямоугольников длина и ширина выражаются числами разной чётности. Тогда площадь каждого прямоугольника – чётное число, следовательно, и площадь квадрата также должна быть чётным числом, а на самом деле площадь квадрата равна нечетна. Противоречие.

4. Две поварихи Аня и Таня хотят почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Аня за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Таня за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с работой?

Будем рассматривать морковку в новых единицах веса 1 кг равен двум обычным килограммам. Тогда всего есть 90 кг овощей, нуждающихся в очистке, при этом Танина скорость независимо от вида чистящихся овощей 2 кг в час. Аня же чистит картошку со скоростью 3 кг в час, а морковку со скоростью 2,5 кг в час. Поэтому Аня будет чистить картошку, а Таня морковку. Через 15 часов Аня почистит 45 кг картошки, а Таня всю морковку. После этого они со скоростью 5 кг в час продолжат чистить оставшиеся 15 кг картошки и управятся за 3 часа. Таким образом, минимальное требующееся им время 18 часов.

5. (все лиги) Квадрат 23 х 23 разрезали на квадраты 1 х 1, 2 х 2 и 3 х 3. Какое наименьшее количество квадратов 1 х 1 могло получиться?

Квадрат 23 х 23 разрезали на квадраты 1 х 1, 2 х 2 и 3 х 3. Мог ли получиться ровно один квадрат 1 х 1?

Ответ: один. Заметим, что совсем без квадратов 1 х 1 обойтись не удастся. Действительно, предположим противное и поставим в клетках столбцов с нечетными номерами -1, а с четными +1. Общая сумма будет равна 23, а сумма в каждом квадрате 2 х 2 и 3 х 3 будет делиться на 3 - противоречие.

Одного квадрата 1 х 1 достаточно. Поместим его в центр, остаток естественным образом разбивается на 4 прямоугольника 11 х 12, каждый из которых в свою очередь разбивается на один прямоугольник 3 х 12 и 4 прямоугольника 2 х 12, а их уже легко разбить на квадраты 3 х 3 и 2 х 2 соответственно

6. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

Ответ: можно. Будем делать это последовательно. Пусть нам удалось выписать несколько натуральных чисел, и пусть последнее число в ряду это a, а наименьшее невыписанное число это b. Тогда продолжим наш ряд числами kab и b, где натуральное k подберем так, чтобы число kab было больше все уже выписанных чисел. Таким образом, нам удалось добавить в последовательность очередное натуральное число.

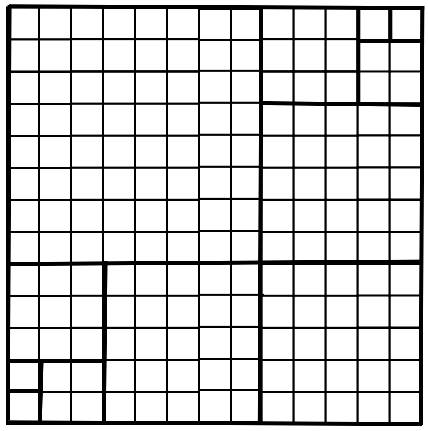
7. Можно ли построить выпуклый шестиугольник, в котором все диагонали имеют равную длину?

Нет. Если для шестиугольника это возможно, то в четырехугольнике, противоположные стороны которого – противоположные стороны шестиугольника, сумма диагоналей будет равна сумме противоположных сторон, а это невозможно по неравенству треугольника.

8. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на два треугольника одинакового периметра?

Верно. Пойдем из вершины $A$ по периметру треугольника $ABC$ в сторону вершины $B$, пока не пройдем полпериметра. Точка $D$, в которой мы окажемся в этот момент, будет лежать на стороне $BC$, потому что в силу неравенства треугольника сторона $AB$ меньше полупериметра, а сумма $AB+BC$ – больше полупериметра. Прямая $AD$ делит треугольник $ABC$ на два треугольника одинакового периметра.

9. Разрежьте клетчатый квадрат размером 13×13 на 12 квадратов так, чтобы все разрезы проходили по сторонам клеточек.



10. По кругу стоят 2019 человек, каждый из которых либо лжец (он всегда врет), либо рыцарь (он всегда говорит правду). Некоторые из них сказали: «Мой правый сосед – лжец». Какое наибольшее количество таких людей могло быть?

Ответ: 2018. Справа от рыцаря, сказавшего: «Мой правый сосед – лжец» – стоит лжец, а справа от сказавшего то же лжеца – рыцарь. Таким образом, если несколько человек, сказавших эту фразу, идут подряд, то лжецы и рыцари среди них чередуются. Поскольку число 2019 нечетно, все 2019 человек сказать эту фразу не могли, а 2018, очевидно, могли.

11. У продавца есть два мотка веревки. В одном мотке – 100 м веревки, в другом – 14 м. Как ему, не пользуясь измерительными инструментами, отмерить покупателю ровно 1 м веревки?

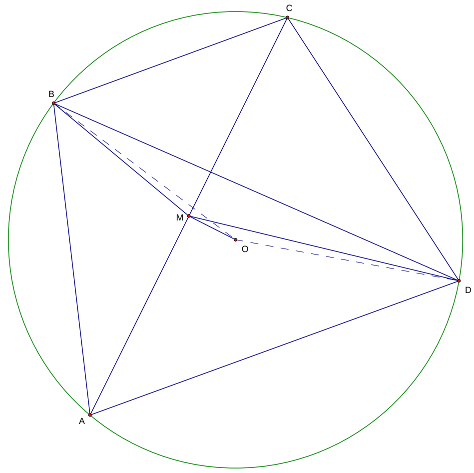
Поскольку 100 = 14×7 + 2, отложив 14-метровую веревку вдоль стометровой 7 раз, получим двухметровый кусок длинной веревки, выступающий за пределы короткой. Отрежем его, сложим вдвое и получим 1 м веревки.

12. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB=CD$, пересекаются в точке $O$. Серединные перпендикуляры к диагоналям $AC$ и $BD$ и биссектриса угла $AOD$ проходят через одну точку. Докажите, что стороны $AD$ и $BC$ параллельны.

Пусть $E$ и $F$ — середины диагоналей $AC$ и $BD$ соответственно, а $Q$ — точка пересечения серединных перпендикуляров. По свойству серединных перпендикуляров, $AQ = CQ$ и $BQ = DQ$. Тогда $\Delta ABQ = \Delta CDQ$ по трем сторонам, и потому $\angle AQB = \angle CQD$. Значит $\angle AQC = \angle AQB + \angle BQC = \angle CQD + \angle BQC = \angle CQD$. В равнобедренных треугольниках $AQC$ и $BQD$ равны углы при вершине $Q$ и высоты, опущенные из вершины $Q$ на их основания (так как точка $Q$ лежит на биссектрисе угла $EOF$). Отсюда нетрудно вывести, что $\Delta ACQ = \Delta BDQ$. Но тогда $AQ = BQ = CQ = DQ$. Так как $\angle AQB = \angle CQD$, высоты равнобедренных треугольников $AQD$ и $BQC$, проведенные из вершины $Q$, лежат на одной прямой, откуда и следует параллельность оснований $AC$ и $BD$ этих треугольников.

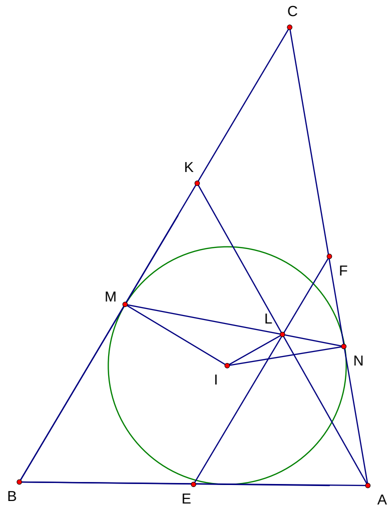
**9 класс (третий тур, высшая лига)**

1. Пусть $x_1$ и $x_2$ – нули приведенного квадратного трехчлена $f(x)$. Вычислить $f(x_1+1)+f(x_2+1)$. **Ответ**. 2. **Решение**. Из условия, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$. Отсюда $f(x_1+1)+f(x_2+1)=1\cdot(x_1+1-x_2)+(x_2+1-x_1)\cdot 1=2$
2. Найти все иррациональные значения $x$, при которых значения выражений $(x^3+2x^2)$ и $(x^2+x)$ – целые числа. **Ответ**. $(-1\pm\sqrt{5})/2$. **Решение**. Заметим, что $(x^3+2x^2)-(x^2+x)=x\left((x^2+x)-1\right)$. Если $x$ - иррациональное число, то $x^2+x-1=0$, и $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$. Так как, при $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$, $x^3+2x^2=(x+1)(x^2+x)-x=(x+1)\cdot 1-x=1$, то оба значения $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$ являются решениями задачи.
3. На диагонали $AC$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка $M$, что $\angle BMC=\angle DMC=\angle BAD$. Верно ли, что $M$ обязательно середина диагонали $AC$? **Решение.** Да, это верно. Рассмотрим случай, когда $AC$ - не диаметр. В этом случае $\angle BMD=\angle BOD$ и четырехугольник $OMBD$ вписанный. Следовательно, $\angle OMD=\angle OBD=90^\circ-\angle BAD$ и $\angle CMO=90^\circ$. В итоге $M$ – середина $AC$. Случай, когда $AC$ - диаметр, рассмотрите самостоятельно.



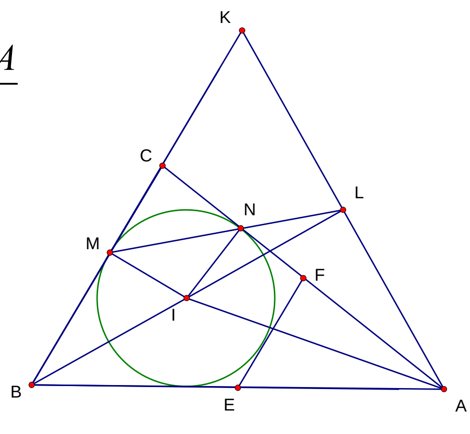

4. Решите систему: $\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=18\\(y+z)(x+y+z)=30\\(z+x)(x+y+z)=24\end{cases}$. **Ответ**. $(1,2,3)$; $(-1,-2,-3)$. **Решение.** Сложим все уравнения, получим $(x+y+z)^2=36,\ x+y+z=\pm 6$. Отсюда легко получаем все решения.
5. Какое количество последовательных автобусных билетов надо купить, чтобы гарантированно получить «счастливый» билет»? (Билет считается «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр). **Ответ**. 1001. **Решение**. Заметим, что если первый из купленных билетов имеет номер 000001, то первый счастливый билет будет 001001, поэтому есть по крайней мере один случай, когда купить меньше чем 1001 билетов недостаточно. Покажем теперь, что 1001 билета всегда достаточно. Обозначим шестизначный номер первого купленного билета как $\overline{AB}$, где $A$ представляет собой число, образованное первыми тремя цифрами и $B$ – число, образованное последними тремя. Если $A>B$, мы можем купить $A-B\le 1000$ билетов и получить счастливый билет $\overline{AA}$. Если $A<B$, то покупка $1001-B$ билетов приводит нас к билету $A'B'$, с $A'=A+1$ и $B'=0$. Затем мы покупаем еще $A+1$ билет, и получаем счастливый билет $\overline{A'A'}$. В этом случае мы получаем счастливый билет после покупки $1002-(B-A)$ билетов. Так как $A<B$, то 1001 билета всегда будет достаточно.

6. На единичном отрезке расположено несколько непересекающихся отрезков красного цвета, общая длина которых больше 0,5. Обязательно ли найдутся две красные точки на расстоянии 1/99? **Ответ**. Нет. **Решение**.




Приведем пример такого расположения отрезков, при котором не найдутся две красные точки на расстоянии 1/99. Разобьем весь единичный отрезок на 99 частей, нечетные из которых будут окрашены в красный цвет и иметь длину 2/199. Тогда общая длина красных отрезков 100/199. Остальные 49 частей (незакрашенные) будут равны между собой по длине. Длина каждой из них равна $99/(49\cdot 199) > 1/99$. Таким образом, длина каждого красного отрезка меньше 1/99, а расстояние между различными красными отрезками больше 1/99 и, значит, двух красных точек на расстоянии 1/99 не найдется.

7. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается сторон $BC$ и $AC$ в точках $M$ и $N$ соответственно, $E$ и $F$ - середины сторон AB и AC, соответственно. Прямые $MN$ и $EF$ пересекаются в точке $D$ .Найдите площадь треугольника $BED$ , если AB = 20 и $\angle$ABC=60°. **Ответ**. $25\sqrt{3}$.**Решение.** Построим равносторонний треугольник $\Delta ABK$. Пусть $L$ - точка пересечения прямой $AK$ с $EF$. Покажем, что $L$ совпадает с $D$. Возможны два случая расположения точки $K$ - на стороне $BC$ либо на продолжении $BC$. Рассмотрим первый случай. Покажем, что $L$ лежит на прямой $MN$. В самом деле, четырехугольник $IMKL$ вписанный. Поэтому




$$\angle MLA = 90^\circ + \angle ILM = 90^\circ + \angle IKM = 90^\circ + \angle IAB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

. С другой стороны, четырехугольник $ILNA$ также вписанный. Поэтому $\angle ALN = \angle AIN = 90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}$. В результате $\angle MLA + \angle ALN = 180^\circ$. В результате площадь треугольника $BED$ составляет одну четвертую площади треугольника $\Delta ABK$ и равна $25\sqrt{3}$. Второй случай рассматривается аналогично

8. Дан некоторый квадратный трехчлен с целыми коэффициентами $P(x)$. Можно ли для некоторого $P(x)$, с ненулевым коэффициентом при $x^2$, покрыть ряд натуральных чисел множеством значений многочлена $P(x)$ в натуральных точках? **Ответ**. Нет. **Решение**. Предположим, напротив, что такой квадратный трехчлен $P(x)$ существует. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Ясно, что для $a < 0$ значения $P(x)$ ограничены сверху и натуральный ряд этими значениями не закрыть, поэтому можно считать, что $a > 0$. Если для некоторых целых чисел $m,n$ выполняются равенства $am^2 + bm + c = k$ и $an^2 + bn + c = k+1$, то вычитая одно из другого

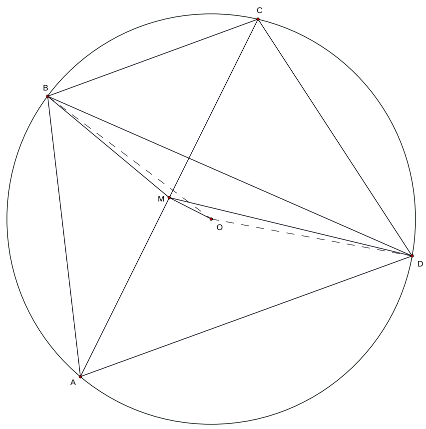
получаем, что $n-m=\pm 1$. Иными словами, соседние натуральные числа могут закрываться только значениями $P(x)$ в соседних натуральных точках. Поскольку, начиная с некоторого натурального $n$, функция $y=P(x)$ является возрастающей, то найдется $m$ такое, что $P(m)=k, P(m+1)=k+1, P(m+2)=k+2$. Вычитая из второго равенства первое, а потом из третьего второе, получим $2am+a+b=1;\ 2am+3a+b=1$. Отсюда $a=0$, что неверно по условию.

## 9 класс (третий тур, первая лига)

9. Пусть $x_1$ и $x_2$ – нули приведенного квадратного трехчлена $f(x)$. Вычислить $f(x_1+1)+f(x_2+1)$. **<u>Ответ</u>**. 2. **<u>Решение</u>**. Из условия, $f(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$. Отсюда $f(x_1+1)+f(x_2+1)=1\cdot(x_1+1-x_2)+(x_2+1-x_1)\cdot 1=2$

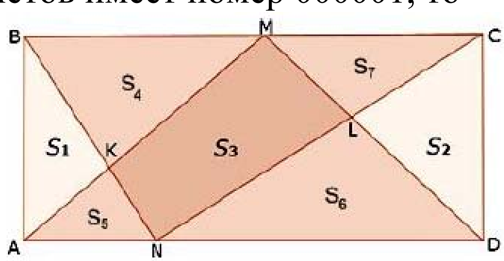
10. Найти все иррациональные значения $x$, при которых значения выражений $\left(x^3+2x^2\right)$ и $\left(x^2+x\right)$ – целые числа. **<u>Ответ</u>**. $\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$. **<u>Решение</u>**. Заметим, что $(x^3+2x^2)-(x^2+x)=x\left((x^2+x)-1\right)$. Если $x$ - иррациональное число, то $x^2+x-1=0$, и $x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$. Так как, при $x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$, $x^3+2x^2=(x+1)(x^2+x)-x=(x+1)\cdot 1-x=1$, то оба значения $x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$ являются решениями задачи.

11. На диагонали $AC$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка $M$, что $\angle BMC=\angle DMC=\angle BAD$. Верно ли, что $M$ обязательно середина диагонали $AC$? **<u>Решение.</u>** Да, это верно. Рассмотрим случай, когда $AC$ - не диаметр. В этом случае $\angle BMD=\angle BOD$ и четырехугольник $OMBD$ вписанный. Следовательно, $\angle OMD=\angle OBD=90^\circ-\angle BAD$ и $\angle CMO=90^\circ$. В итоге M – середина AC. Случай, когда $AC$ - диаметр, рассмотрите самостоятельно.




12. Решите систему: $\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=18,\\(y+z)(x+y+z)=30,\\(z+x)(x+y+z)=24.\end{cases}$ **<u>Ответ</u>**. $\left(1,2,3\right);\ \left(-1,-2,-3\right)$. **<u>Решение.</u>** Сложим все уравнения, получим $\left(x+y+z\right)^2=36,\ x+y+z=\pm 6$. Отсюда легко получаем все решения.

13. Какое количество последовательных автобусных билетов надо купить, чтобы гарантированно получить «счастливый» билет»? (Билет считается «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр). **<u>Ответ</u>**. 1001. **<u>Решение</u>**. Заметим, что если первый из купленных билетов имеет номер 000001, то первый счастливый билет будет 001001, поэтому есть по крайней мере один случай, когда купить



меньше чем 1001 билетов недостаточно. Покажем теперь, что 1001 билета всегда достаточно. Обозначим шестизначный номер первого купленного билета как $\overline{AB}$, где $A$ представляет собой число, образованное первыми тремя цифрами и $B$ – число, образованное последними тремя. Если $A > B$, мы можем купить $A - B \le 1000$ билетов и получить счастливый билет $\overline{AA}$. Если $A < B$, то покупка $1001 - B$ билетов приводит нас к билету $\overline{A'B'}$, с $A' = A + 1$ и $B' = 0$. Затем мы покупаем еще $A + 1$ билет, и получаем счастливый билет $\overline{A'A'}$. В этом случае мы получаем счастливый билет после покупки $1002 - (B - A)$ билетов. Так как $A < B$, то 1001 билета всегда будет достаточно.

14. $ABCD$ – прямоугольник. Известно, что площадь треугольника $ABK$ равна $S_1$, площадь треугольника $CDL$ равна $S_2$. Найти площадь $S_3$ четырехугольника $KMLN$. **Ответ**. $S_3 = S_1 + S_2$. **Решение**. Обозначим площади соответствующих треугольников (см. рис.), через $S_4, S_5, S_6$ и $S_7$, а площадь прямоугольника $ABCD$ – через $S$. Тогда $S_3 + S_5 + S_6 = S/2$, $S_3 + S_4 + S_7 = S/2$ и $S_1 + S_2 + S_5 + S_6 = S/2$. Из двух последних равенств следует, что $S_3 = S_1 + S_2$.
15. В неравнобедренном треугольнике $ABC$ (углы треугольника равны соответственно $\alpha, \beta$ и $\gamma$) серединный перпендикуляр к стороне AC и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Найдите угол APC. **Ответ**. $180^\circ - \beta$. **Решение**. Серединный перпендикуляр к стороне AC и биссектриса угла B пересекаются в середине дуги описанной окружности треугольника $ABC$, не содержащей точки A.
16. Дан некоторый квадратный трехчлен с целыми коэффициентами $P(x)$. Можно ли для некоторого $P(x)$ с ненулевым коэффициентом при $x^2$ покрыть ряд натуральных чисел множеством значений многочлена $P(x)$ в натуральных точках? **Ответ**. Нет. **Решение**. Предположим, напротив, что такой квадратный трехчлен $P(x)$ существует. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \ne 0$). Ясно, что для $a < 0$ значения $P(x)$ ограничены сверху и натуральный ряд этими значениями не закрыть, поэтому можно считать, что $a > 0$. Если для некоторых целых чисел $m, n$ выполняются равенства $am^2 + bm + c = k$ и $an^2 + bn + c = k + 1$, то вычитая одно из другого получаем, что $n - m = \pm 1$. Иными словами, соседние натуральные числа могут закрываться только значениями $P(x)$ в соседних натуральных точках. Поскольку, начиная с некоторого натурального $n$, функция $y = P(x)$ является возрастающей, то найдется $m$ такое, что $P(m) = k, P(m+1) = k+1, P(m+2) = k+2$. Вычитая из второго равенства первое, а потом из третьего второе, получим $2am + a + b = 1;\ 2am + 3a + b = 1$. Отсюда $a = 0$, что неверно по условию.

## Математический бой № 3

## 10-11 класс высшая лига

10-11 класс высшая лига

**1.** Найдите все положительные решения уравнения $x^{2019x} = (2019x)^x$.

**Ответ:** $x = \sqrt[2018]{2019}$. Пусть $x$ – положительный корень уравнения. Возведем обе части уравнения в степень $1/x$. Получим $x^{2019} = 2019x$, можно сократить на $x$ ($x > 0$ потери корней нет), $x^{2018} = 2019$, $x = \sqrt[2018]{2019}$.

**2.** Даны $2^{n-1}$ подмножества множества $X$, состоящего из $n$ элементов такие, что пересечение любых трех из них – непустое. Докажите, что пересечение всех множеств не пусто.

Пусть $S$ – данная совокупность подмножеств множества $X$. Ясно, что $\varnothing$ не принадлежит $S$. Далее, с одной стороны, для каждой пары множеств $A$ и $X \setminus A$ не более одного множества принадлежит $S$, поскольку $A \cap X \setminus A = \varnothing$. С другой стороны, всего подмножеств множества $X$ имеется $2^n$, а в $S$ находится $2^{n-1}$ подмножества. Значит, из каждой такой пары ровно одно множество принадлежит $S$. Пусть $A, B \in S$, заметим, что $A \cap B \in S$. Действительно, если это не так, то $X \setminus (A \cap B) \in S$. Однако в этом случае получаем $A \cap B \cap (X \setminus (A \cap B)) = \varnothing$, что противоречит условию. Из доказанного вытекает, что пересечение всех множеств $S$ является снова элементом множества $S$ и не пусто.

**3.** Можно ли клетки таблицы 8×8 заполнить числами от 1 до 8 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и на двух больших диагоналях были записаны различные числа?

**Ответ:** да. Пример на рисунке.

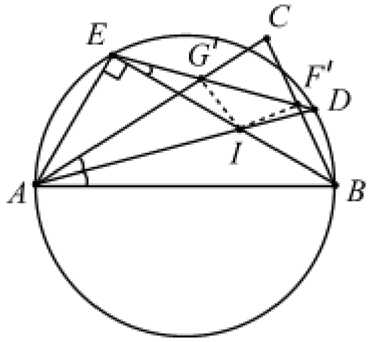
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 | 8 | 2 | 3 | 7 | 4 |
| 5 | 4 | 1 | 6 | 3 | 7 | 2 | 8 |
| 2 | 7 | 6 | 3 | 1 | 8 | 4 | 5 |
| 8 | 5 | 2 | 7 | 6 | 4 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 8 | 1 | 6 | 7 |
| 6 | 3 | 7 | 2 | 4 | 5 | 8 | 1 |
| 7 | 1 | 8 | 4 | 5 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 8 | 4 | 1 | 7 | 6 | 5 | 2 |

**4.** Решите уравнение $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2019}$ в целых числах.

**Ответ:** (2019, 0), (0, 2019). После переноса $\sqrt{m}$ в правую часть и возведения в квадрат уравнение равносильно $2\sqrt{2019m} = m + 2019 - n$, здесь подкоренное выражение должно быть полным квадратом $2019 \cdot m = k^2$. В разложении $2019 = 3 \cdot 673$ простые множители в первой степени, значит, $k$ делится на 2019, $k = 2019a$ и $m = 2019a^2$, где $a$ неотрицательное целое число. Точно также замечаем $n = 2019b^2$. Уравнение принимает вид $\sqrt{2019a^2} + \sqrt{2019b^2} = \sqrt{2019}$, значит, $a + b = 1$.

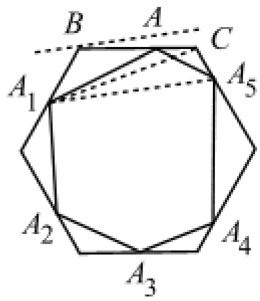
**5.** Пусть $ABC$ треугольник, $\Gamma$ – окружность с диаметром $AB$. Биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ABC$ пересекают окружность $\Gamma$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Вписанная в треугольник

$ABC$ окружность касается $BC$ и $AC$ в точках $F$ и $G$ соответственно. Докажите, что точки $D$, $E$, $F$ и $G$ лежат на одной прямой.




Обозначим точки пересечения $ED$ с $BC$ и $AC$ как $F'$ и $G'$, $I$ – точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$. Ясно, что углы $ADB$ и $AEB$ прямые. Достаточно заметить, что $IF'$ и $IG'$ перпендикулярны $BC$ и $AC$. Ясно, $\angle G'EI = \angle DEB = \angle DAB = \angle DAG' = \angle G'AI$. Это означает, что четырехугольник $AEG'I$ – вписанный и $\angle AG'I = \angle AEI = \angle AEB = 90°$. Аналогично замечается, что $\angle BF'I = 90°$.(The 29th Nordic Mathematical Contest March 24, 2015)

**6.** *Перестройка* выпуклого $m$ – угольника это замена двух последовательных сторон $AB$ и $BC$ на три стороны $AM$, $MN$ и $BN$, где $M$ и $N$ – середины сторон $AB$ и $BC$. Пусть имеется правильный шестиугольник $P_6$ площади 1, к нему применили перестройку и получили семиугольник $P_7$, затем получили $P_8$ (выбрав для перестройки любую из вершин $P_7$). После нескольких таких перестроек был получен некоторый $n$ – угольник. Докажите, что его площадь не меньше 1/2.




Заметим, что у построенного $n$ – угольника есть 6 сторон, которые лежат на сторонах $P_6$. Для этого раскрасим стороны $P_6$ в шесть разных цветов (считаем, что вершины окрашены в два цвета). В процессе перестроек будут появляться некрашеные стороны, а крашенные на каждом шаге или остаются неизменными или теряют половину, то есть не исчезают. Рассмотрим теперь многоугольники $P$ со свойством: на каждой стороне $P_6$ есть вершина многоугольника $P$. Осталось заметить, площадь $P$ не меньше 1/2. Пусть $P = A_1A_2A_3A_4A_5A$, при этом вершина $A$ лежит внутри стороны $BC$ шестиугольника $P_6$. Минимальное расстояние точек отрезка $BC$ до $A_1A_5$ реализуется на конце отрезка (на рисунке в точке $C$). Значит, $S_{A_1A_2A_3A_4A_5A} \geq S_{A_1A_2A_3A_4A_5C}$. Отсюда следует, что вершины $P$ должны лежать в вершинах $P_6$. Среди всех таких $P$ минимум площади достигается на треугольнике, вершины которого идут через одну в $P_6$.

**7.** Найдите все натуральные $n$, такие, что число $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ является произведением трех различных простых чисел в некоторых ненулевых степенях.

**Ответ:** $n = 2, 3, 6$.

Пусть $N = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$. Ясно, что число $N$ делится на 2 и 3. Обозначим третье простое число $p$. Из чисел $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$ выделим три подряд идущих числа $m$, $m+1$, $m+2$, где $m$ нечетное число. Нечетные числа $m$ и $m+2$ не имеют общих делителей, значит, одно из них степень числа 3, другое – степень числа $p$, а $m+1$ является степенью числа 2. Решим два уравнения:

1) $2^k + 1 = 3^l$. Во-первых, пары $k = 1$, $l = 1$ и $k = 3$, $l = 2$ являются решениями этого уравнения. Заметим, что для $k > 3$ и $l > 2$ других решений уравнение не имеет. Из равенства $3^l - 1 = (3-1)\left(3^{l-1} + 3^{l-2} + \ldots + 3 + 1\right)$ вытекает, что если $l$ – нечетное число, то во второй скобке имеется сумма нечетного количества нечетных чисел, то есть нечетное число, большее 1 и $2^k = 3^l - 1$ невозможно. Если $l = 2d$ – четное число, то получим соотношение $2^k = 3^{2d} - 1 = (3^d - 1)(3^d + 1)$, где числа $3^d - 1$ и $3^d + 1$ – два последовательных числа – степени двойки. Это возможно лишь, когда эти числа 2 и 4. Итак, для двух пар (2, 3) и (8, 9) получим 2, 3, 4, 5 и 6, 7, 8, 9

2) $2^k = 3^l + 1$. Во-первых, пара $k = 2$, $l = 1$ является решением этого уравнения. Заметим, что для $k > 2$ и $l > 1$ других решений уравнение не имеет. Ясно, $2^k$ делится на 8. Если $l = 2d$, то $3^{2d} + 1 = 9^d + 1$ имеет остаток 2 при делении на 8. Если $l = 2d + 1$, то $3^{2d+1} + 1 = 3\cdot 9^d + 1$ имеет остаток 4 при делении на 8. Пара (3, 4) дает еще решение 3, 4, 5, 6. (Mathematical Olympiad, Spain 1993).

**8.** Имеется куча из 1000 камней. Два игрока на каждом своем ходе могут взять от 1 до 5 камней. Кроме того, если игрок сказал: «Эгегей!», то он может взять 6 камней. За игру возглас «Эгегей!» может прозвучать не более 10 раз (например, 7 раз скажет первый игрок и 2 раза второй). Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Определите, кто из игроков может выиграть независимо от ходов соперника.

**Ответ:** выигрывает второй игрок.

Во-первых, $1000 = 155\cdot 6 + 10\cdot 7$. Перед началом игры второй игрок мысленно создает 155 кучек камней по 6 и 10 кучек по 7 камней.

Рассмотрим обмен первыми ходами:

1). Если первый игрок берет 1, 2, 3, 4, 5 камней, то второй игрок берет 5, 4, 3, 2, 1 камень соответственно. После этого хода второй игрок мысленно создает 154 кучи камней по 6 и 10 кучек по 7 камней.

2) Если первый игрок берет 6 камней («Эгегей!»), то второй игрок берет 1 камень. После этого хода второй игрок мысленно создает 155 кучек камней по 6 и 9 кучек по 7 камней.

Таким образом, у второго игрока в его стратегии количество куч уменьшается на 1 в любом случае. При этом только «Эгегей!» уменьшает количество кучек по 7 камней на 1.

Второй игрок придерживается этой стратегии, пока не обнулится количество куч по 6 камней. Уточним это. Если первый игрок берет 6 камней («Эгегей!») 10 раз и после ответа второго игрока на десятый возглас (по правилу 2)) есть еще камни, то их количество кратно шести и, следуя правилу 1) второй игрок победит. Если же после хода второго игрока у него осталось несколько кучек по 7 камней, и нет кучек по 6 камней, то он меняет стратегию:

3) Если первый игрок берет 2, 3, 4, 5 камней, то второй игрок берет 5, 4, 3, 2 камень соответственно;

4) Если первый игрок берет 1 камень, то второй берет 6 камней («Эгегей!»);

5) Если первый игрок берет 6 камней («Эгегей!»), то второй игрок берет 1 камень.

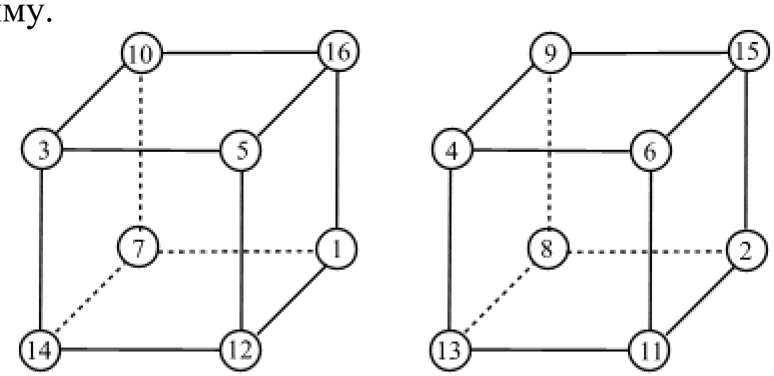
Таким образом, последний камень берет второй игрок.

## Решения день 3 первая лига 10-11

**1.** Числа $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ таковы, что выполнены неравенства:
$a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее.

**Ответ:** наибольшее число $e$. Из условия следует, что $a + b < e + a$, значит, $b < e$. Из условия следует, что $c + d < d + e$, значит, $c < e$. Из $a + b < b + c$, получим $a < c$ . Из $c + d < b + c$, получаем $d < b$. Поскольку $b < e$, получаем максимальность числа $e$.

**2.** Распределите натуральные числа от 1 до 16 в вершины двух кубов, по одному числу в каждую вершину так, чтобы числа в вершинах одной грани имели одну и ту же сумму.




(Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition)

**3.** Известно, что верно ровно одно из приведенных ниже утверждений:

(A) Все последующие утверждения верны;

(B) Никакое из последующих утверждений не верно;

(C) Верно хотя бы одно из последующих утверждений;

(D) Все предыдущие утверждения верны;

(E) Никакое из предыдущих утверждений не верно.

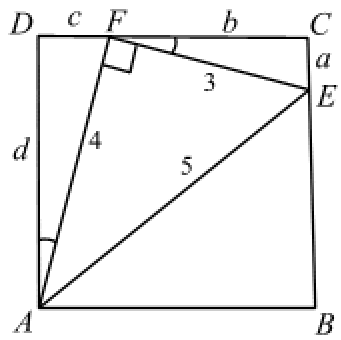
Определите это верное утверждение.

**Ответ:** (B). Если верно (A), то верно и (C) – (A) как единственно верное отпадает. Если верно (C), то (C) не может быть единственно верным утверждением. Если верно (D), то (C) тоже верно. Если верно (E), то опять же (C) верное.

**4.** Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

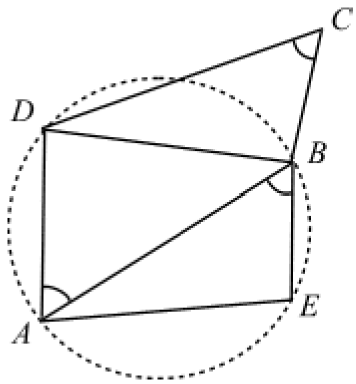
Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вид $ax^2+bx+c$. Тогда уравнения имеют вид $ax^2+(b-1)x+\left(c+1\right)=0$ и $ax^2+\left(b+2\right)x+\left(c-2\right)=0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному корню, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $\left(b-1\right)^2-4a\left(c+1\right)=0$ и $\left(b+2\right)^2-4a\left(c-2\right)=0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2-4ac=-2$. Значит, трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

**5.** Дан квадрат *ABCD* и треугольник *AFE,* у которого вершины *E* и *F* лежат на сторонах квадрата *BC* и *CD* соответственно. При этом угол *AFE* прямой, *AF* = 4, *FE* = 3. Найдите площадь квадрата *ABCD*.




**Ответ:** 256/17. Сумма углов *AFD* и *EFC* равна 90°, значит, ∠*FAD* = 90° – ∠*AFD* = ∠*EFC* и треугольники *AFD* и *FEC* подобные. Обозначим *AD* = *d*, *DF* = *c*, *FC* = *b*, *CE* = *a*. Из замеченного подобия треугольников, получаем $a/3 = c/4$, $b/3 = d/4$. Далее, $c = 4/3\cdot a$, $d = 4/3\cdot b$, $c + b = d$, $4/3\cdot a + b = 4/3\cdot b$. Получаем, $b = 4a$, $c = 4/3\cdot a$, $d = 16/3\cdot a$, $EB = 13/3\cdot a$, $EB = 13/16\cdot AB$. Наконец, $AB^2 + BE^2 = 5^2$ и $AB^2=\dfrac{16^2}{17}$.

**6.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, $AB = CD$, $\angle BCD = 57°$, и $\angle ADB + \angle CBD = 180°$. Найдите величину $\angle BAD$.



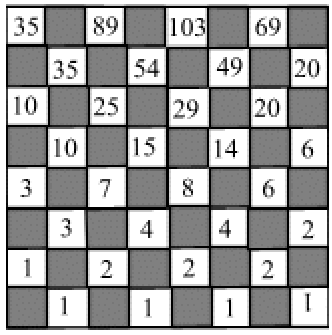

Построим треугольник $ABE$: $\angle ABE = \angle DBC$, $BE = CB$. По построению треугольники $DCB$ и $ABE$ равны. Значит, $\angle CBD = \angle BEA$, $\angle ADB + \angle BEA = 180°$ и около четырехугольника $AEBD$ можно описать окружность. Хорды $BD$ и $AE$ равны, значит $AD$ и $BE$ параллельны, четырехугольник $AEBD$ – трапеция и $\angle BAD = \angle BCD = 57°$.

**7.** Квадрат разрезали на прямоугольники так, что ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников. Затем пересчитали все точки квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Докажите, что в результате получили четное число.

Во-первых, 4 вершины исходного квадрата является вершиной ровно одного прямоугольника. Обозначим $n$ количество остальных точек квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Теперь посчитаем количество всех прямых углов у всех прямоугольников. Поскольку ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников, то получим 4 прямых угла в вершинах исходного квадрата и по два в $n$ остальных точках. Всего $4 + 2n$. В каждом прямоугольнике 4 прямых угла, значит, $4 + 2n$ делится на 4 и $n$ – четное.

**8.** Имеется классическая шахматная доска 8×8 с полями черного и белого цветов и шашка. Шашка начинает на белой клетке первой горизонтали и далее может делать ходы с белой клетки на соседнюю сверху белую клетку. Сколько можно построить разных маршрутов по белым полям для шашки от первой до восьмой горизонтали?

Ответ: 296 маршрутов. Подсчет числа маршрутов выполняется аналогично построению треугольника Паскаля. Попасть в белые клетки первой горизонтали можно одним способом, затем начинает работать правило сложения в комбинаторике. В результате количество маршрутов равно 35 + 89 + 103 + 69 = 296. British Mathematical Olympiad 2008

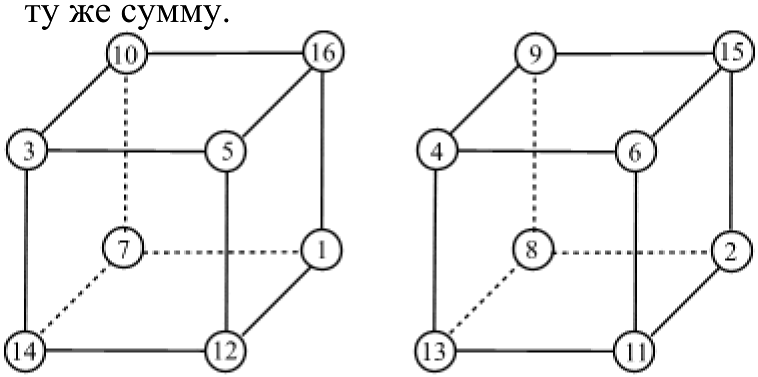



**Решения день 3 первая лига 10-11**

**1.** Числа $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ таковы, что выполнены неравенства:
$a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее.

**Ответ:** наибольшее число $e$. Из условия следует, что $a + b < e + a$, значит, $b < e$. Из условия следует, что $c + d < d + e$, значит, $c < e$. Из $a + b < b + c$, получим $a < c$ . Из $c + d < b + c$, получаем $d < b$. Поскольку $b < e$, получаем максимальность числа $e$.

**2.** Распределите натуральные числа от 1 до 16 в вершины двух кубов, по одному числу в каждую вершину так, чтобы числа в вершинах одной грани имели одну и ту же сумму.




(Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition)

**3.** Известно, что верно ровно одно из приведенных ниже утверждений:

(A) Все последующие утверждения верны;

(B) Никакое из последующих утверждений не верно;

(C) Верно хотя бы одно из последующих утверждений;

(D) Все предыдущие утверждения верны;

(E) Никакое из предыдущих утверждений не верно.

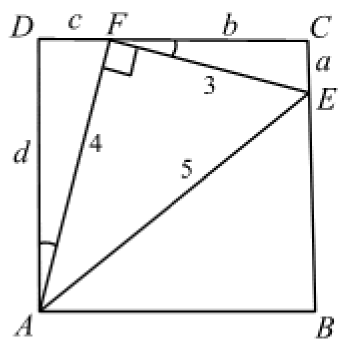
Определите это верное утверждение.

**Ответ:** (B). Если верно (A), то верно и (C) – (A) как единственно верное отпадает. Если верно (C), то (C) не может быть единственно верным утверждением. Если верно (D), то (C) тоже верно. Если верно (E), то опять же (C) верное.

**4.** Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

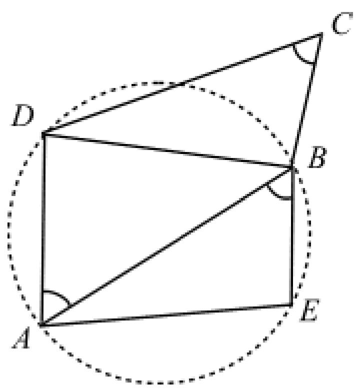
Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вид $ax^2+bx+c$. Тогда уравнения имеют вид $ax^2+(b-1)x+(c+1)=0$ и $ax^2+(b+2)x+(c-2)=0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному корню, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $(b-1)^2-4a(c+1)=0$ и $(b+2)^2-4a(c-2)=0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2-4ac=-2$. Значит, трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

**5.** Дан квадрат $ABCD$ и треугольник $AFE$, у которого вершины $E$ и $F$ лежат на сторонах квадрата $BC$ и $CD$ соответственно. При этом угол $AFE$ прямой, $AF = 4$, $FE = 3$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.




**Ответ:** 256/17. Сумма углов $AFD$ и $EFC$ равна 90°, значит, $\angle FAD = 90° - \angle AFD = \angle EFC$ и треугольники $AFD$ и $FEC$ подобные. Обозначим $AD = d$, $DF = c$, $FC = b$, $CE = a$. Из замеченного подобия треугольников, получаем $a/3 = c/4$, $b/3 = d/4$. Далее, $c = 4/3\cdot a$, $d = 4/3\cdot b$, $c + b = d$, $4/3\cdot a + b = 4/3\cdot b$. Получаем, $b = 4a$, $c = 4/3\cdot a$, $d = 16/3\cdot a$, $EB = 13/3\cdot a$, $EB = 13/16\cdot AB$. Наконец, $AB^2 + BE^2 = 5^2$ и $AB^2=\dfrac{16^2}{17}$.

**6.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, $AB = CD$, $\angle BCD = 57°$, и $\angle ADB + \angle CBD = 180°$. Найдите



величину $\angle BAD$.

Построим треугольник $ABE$: $\angle ABE = \angle DBC$, $BE = CB$. По построению треугольники $DCB$ и $ABE$ равны. Значит, $\angle CBD = \angle BEA$, $\angle ADB + \angle BEA = 180°$ и около четырехугольника $AEBD$ можно описать окружность. Хорды $BD$ и $AE$ равны, значит $AD$ и $BE$ параллельны, четырехугольник $AEBD$ – трапеция и $\angle BAD = \angle BCD = 57°$.

**7.** Квадрат разрезали на прямоугольники так, что ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников. Затем пересчитали все точки квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Докажите, что в результате получили четное число.

Во-первых, 4 вершины исходного квадрата является вершиной ровно одного прямоугольника. Обозначим $n$ количество остальных точек квадрата, которые являются вершинами прямоугольников. Теперь посчитаем количество всех прямых углов у всех прямоугольников. Поскольку ни одна из точек квадрата не является общей вершиной четырех прямоугольников, то получим 4 прямых угла в вершинах исходного квадрата и по два в $n$ остальных точках. Всего $4 + 2n$. В каждом прямоугольнике 4 прямых угла, значит, $4 + 2n$ делится на 4 и $n$ – четное.

**8.** Имеется классическая шахматная доска 8×8 с полями черного и белого цветов и шашка. Шашка начинает на белой клетке первой горизонтали и далее может делать ходы с белой клетки на соседнюю сверху белую клетку. Сколько можно построить разных маршрутов по белым полям для шашки от первой до восьмой горизонтали?

Ответ: 296 маршрутов. Подсчет числа маршрутов выполняется аналогично построению треугольника Паскаля. Попасть в белые клетки первой горизонтали можно одним способом, затем начинает работать правило сложения в комбинаторике. В результате количество маршрутов равно 35 + 89 + 103 + 69 = 296. British Mathematical Olympiad 2008

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | | 89 | | 103 | | 69 | |
| | 35 | | 54 | | 49 | | 20 |
| 10 | | 25 | | 29 | | 20 | |
| | 10 | | 15 | | 14 | | 6 |
| 3 | | 7 | | 8 | | 6 | |
| | 3 | | 4 | | 4 | | 2 |
| 1 | | 2 | | 2 | | 2 | |
| | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |

**Решения день 3 вторая лига 10-11**

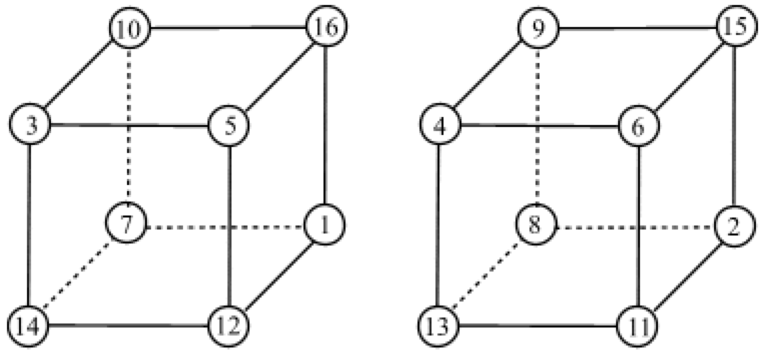
**1.** Числа $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ таковы, что выполнены неравенства:
$a + b < c + d < e + a < b + c < d + e$. Найдите среди этих чисел наибольшее.

**Ответ:** наибольшее число $e$. Из условия следует, что $a + b < e + a$, значит, $b < e$. Из условия следует, что $c + d < d + e$, значит, $c < e$. Из $a + b < b + c$, получим $a < c$ . Из $c + d < b + c$, получаем $d < b$. Поскольку $b < e$, получаем максимальность числа $e$.

**2.** Путешественник вышел из дома в 3 часа дня, в дороге не останавливался и возвратился в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он шел со скоростью 4 км/ч, в гору – 3 км/ч, под гору – 6 км/ч. Найдите расстояние, которое прошел путешественник.

**Ответ:** 12 км. Пусть по дороге «туда» путешественник шёл $a$ км по ровным участкам, $b$ км в гору и $c$ км под гору. Тогда он затратил на дорогу «туда» $\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{6}$ часов. На дорогу обратно путешественник затратил $\frac{a}{4}+\frac{b}{6}+\frac{c}{3}$ часов. Отметим, что $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. Складывая время движения, получим равенство $\frac{1}{2}(a+b+c)=6$.

**3.** Распределите натуральные числа от 1 до 16 в вершины двух кубов, по одному числу в каждую вершину так, чтобы числа в вершинах одной грани имели одну и ту же сумму.




(Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition)

**4.** Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2017. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

**Ответ.** Уменьшится на 2019.

Пусть изначально были числа $x$ и $y$ (с произведением $xy$). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 2017, то есть $y - x - 1 = 2017$ или $y - x = 2018$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x - 1)(y + 1) = xy - y + x - 1$. Заметим, что

$$xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 2018 - 1 = xy - 2019.$$

То есть произведение уменьшилось на 2019.

**5.** Учащиеся отправились на праздник. У каждого юноши было по 5 воздушных шаров, а у каждой девушки – по 4 шара. По дороге они стали шутить и прокалывать шары друг у друга. В итоге каждая девушка проколола по 1 шару, а каждый юноша – по 2 шара. Дима сосчитал все оставшиеся шары, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.

Обозначим $a$ – количество юношей, $b$ – количество девушек. Тогда $5a+4b$ – первоначальное количество шариков, $2a+b$ – количество проколотых шариков, $3a+3b$ – количество оставшихся шариков. Поскольку количество шариков, с одной стороны есть число $3(a+b)$ кратное трем, с другой стороны, есть число 100 не кратное трем – Дима ошибся.

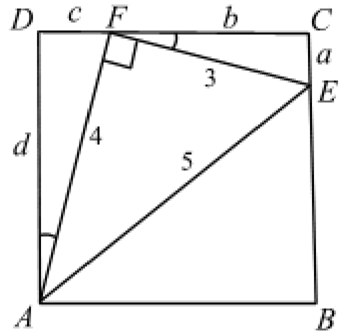
**6.** Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вид $ax^2+bx+c$. Тогда уравнения имеют вид $ax^2+(b-1)x+(c+1)=0$ и $ax^2+(b+2)x+(c-2)=0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному корню, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $(b-1)^2-4a(c+1)=0$ и

$(b+2)^2 - 4a(c-2) = 0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2 - 4ac = -2$. Значит, трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

**7.** Дан квадрат $ABCD$ и треугольник $AFE$, у которого вершины $E$ и $F$ лежат на сторонах квадрата $BC$ и $CD$ соответственно. При этом угол $AFE$ прямой, $AF = 4$, $FE = 3$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

**Ответ:** 256/17. Сумма углов $AFD$ и $EFC$ равна 90°, значит, $\angle FAD = 90° - \angle AFD = \angle EFC$ и треугольники $AFD$ и $FEC$ подобные.

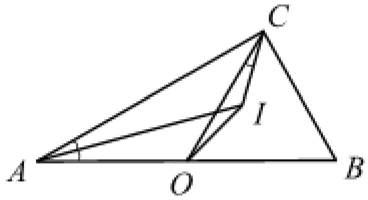



Обозначим $AD = d$, $DF = c$, $FC = b$, $CE = a$. Из замеченного подобия треугольников, получаем $a/3 = c/4$, $b/3 = d/4$. Далее, $c = 4/3 \cdot a$, $d = 4/3 \cdot b$, $c + b = d$, $4/3 \cdot a + b = 4/3 \cdot b$. Получаем, $b = 4a$, $c = 4/3 \cdot a$, $d = 16/3 \cdot a$, $EB = 13/3 \cdot a$, $EB = 13/16 \cdot AB$. Наконец, $AB^2 + BE^2 = 5^2$ и $AB^2 = \dfrac{16^2}{17}$.

**8.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $30^0$, $O$ – середина гипотенузы $AB$, $I$ – центр вписанной окружности. Найдите угол $IOC$.

Ответ: $15^0$

Поскольку $O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, угол $OCA$ равен $30^0$. Поскольку $I$ – точка пересечения биссектрис, угол $ICO$ равен $15^0$. Это означает, что углы $ICO$ и $IAO$ равны, а около четырёхугольника $ICAO$ можно описать окружность. Следовательно, углы $IOC$ и $IAC$ равны.




***Второе решение*.** Треугольник $BOC$ равносторонний, поэтому биссектриса $BI$ угла $CBO$ лежит на серединном перпендикуляре отрезка $OC$. Отсюда следует, что треугольник $OIC$ – равнобедренный с основанием $OC$. Значит, $\angle IOC = \angle ICO = \angle ICA - \angle OCA = 45^0 - 30^0 = 15^0$.