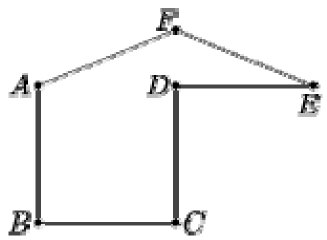
Второй тур, ответы, указания и решения

7-8 классы

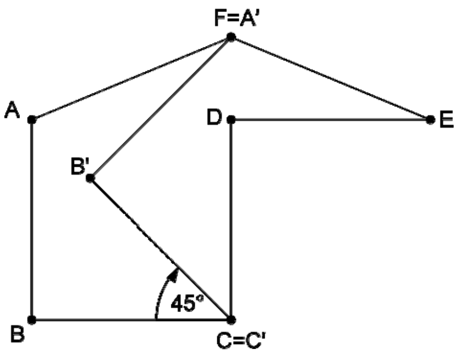
1. (все лиги) В ряд слева направо стоят 8 одинаковых коробочек, в каждой по 13 одинаковых пуговиц. Из одной коробочки переложили одну пуговицу в соседнюю справа. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить коробочку, в которой меньше пуговиц? Открывать коробочки нельзя.

Пронумеруем коробочки слева направо. Сравним 3 и 6. если равновесие, то перекладывали из 1, 4 или 7. Сравнивая 1 и 4, определим более легкую из этих трех коробочек. Если 3 тяжелее 6, перекладывали из 2 или 6, сравним их. Если 3 легче 6, перекладывали из 3 или 5. Сравним их.

2. (8, все лиги) Дан шестиугольник ABCDEF (см. рис.) Точки A, B, C, D – вершины квадрата, D – середина AE, AF=FE и $\angle AFE = 135°$. Разделите шестиугольник одной ломаной на две равные части.



Указание.



3. (7, высшая, 8, высшая) Два натуральных числа называются подобными, если одно из них получается из другого вычеркиванием какой-то одной цифры (и, возможно, отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух подобных.

Рассмотрим число n, представимое в виде суммы двух подобных. Если вычеркнутая цифра не последняя, то два подобных числа оканчиваются на одну и ту же цифру. Тогда n четное. Если вычеркнутая цифра последняя, то два подобных числа имеют вид 10A + x и A, где x вычеркнутая цифра. Тогда n = 11A+x, т.е. цифра x остаток от деления n на 11. Таким образом, остаток от деления n на 11 не превосходит 9. Значит, числа вида 11A+10 не представимы в виде суммы двух подобных чисел, одно из которых получено из другого вычеркиванием последней цифры. Получаем, что числа вида 22m + 21 не представимы в виде суммы двух подобных.

4. (7 все, 7-8, 8 – первая лига) Имеется шесть человек. Среди любых троих есть двое, которые не знают друг друга. Обязательно ли найдутся трое из этой шестерки, которые попарно незнакомы?

Ответ: да. Рассмотрим человека A. Из остальных есть либо трое, незнакомых с A, либо трое знакомых с A, пусть в каждом случае это B, C, D. В первом случае в тройке BCD есть пара незнакомых, они вместе с A образуют искомую тройку. Во втором случае из условия сразу следует, что BCD – искомая тройка.

5. (7 все, 7-8, 8 – первая лига) Артем написал три натуральных числа (не обязательно различных) на доске, каждое из которых меньше 2019. Затем он стер эти числа (a, b, c) и вместо них написал числа $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ которые также оказались целые. Когда он повторил это еще 10 раз, на доске появилось число 100, а все промежуточные тройки состояли из целых чисел. Какие еще числа записаны на доске в этот момент?

Ответ: 100 и 100. За один шаг разность между максимальным и минимальным числом уменьшается вдвое. Если в конце не все числа равны, то эта разность равна хотя бы 1, значит, вначале она была по крайней мере 2^{11}=2048 – противоречие, так как числа меньше 2019.

6. (7-8, 8 – все) Пусть x, y, z – длины сторон прямоугольного треугольника, причем $z>y\geq x$. Докажите, что $x>2(z-y)$.

По теореме Пифагора $x^2 = z^2-y^2 = (z-y)(z+y)$. Поскольку x − наименьшая сторона, $z+y>2x$, откуда $x^2 = (z-y)(z+y)> 2(z-y)x$, то есть $x>2(z-y)$.

7. (7-8, 8-первая, 7 – все лиги) Лотерея проводится следующим образом. Никита выбирает случайное число от 1 до 1000. Если число делится на 2, платят 1 рубль, если делится на 10 – 2 рубля, если делится на 12 – четыре рубля, на 20 – восемь, если оно делится на несколько числе, платят сумму. Сколько может выиграть Никита за один раз в такой игре? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Если число не делится на 2, то оно не делится на 10, 12, 20. Если делится на 20, то делится и на 10. Если делится на 10 и на 12, то делится на 20. Отсюда варианты (см. таблицу, плюс – делится, минус – не делится):

2	10	12	20	Выигрыш
-	-	-	-	0
+	-	-	-	1
+	-	+	-	5
+	+	-	-	3
+	+	-	+	11

+	+	+	+	15

8. (8-первая, 7-вторая) На матбои пришли 105 девочек и 95 мальчиков и разбились на сто пар. Каждые два мальчика, образовавшие пару, поздоровались за руку. Две девочки, образовавшие пару, обняли друг друга. Смешанные пары начали решать задачи. Чего оказалось больше: рукопожатий или объятий и на сколько?

Уберем пары мальчик-девочка. Среди оставшихся девочек, как и было раньше, на 10 больше, чем мальчиков, но теперь есть только пары мальчик-мальчик и девочка-девочка. Таким образом, количество пар девочка-девочка на 5 больше, чем количество пар мальчик-мальчик, а значит, объятий на 5 больше.

9. (7-8, 8-высшая, первая) В выпуклом 12-угольнике все углы кратны 30 градусам. Докажите, что все углы этого многоугольника равны.

Все внешние углы 12-угольника также кратны 30 градусам. Если хотя бы один из них более 30°, то общая сумма внешних углов более 12 × 30° = 360°, что невозможно (сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°). Значит, все внешние углы равны 30°, а все углы многоугольника равны 150°.

Комментарий. Ответ с примером – 6 баллов, только ответ – 2 балла, оценка – 6 баллов. При проверке корректности считать, что если есть только оценка или только пример, то задача не решена.

10. (7-8, 8 – 1 лига, 7 – высшая лига) На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком, затем к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли на каждом из этих перпендикуляров оказаться ровно по две отмеченные точки?

Ответ: могло. Примером конструкции служат вершины квадрата ABCD и такие точки E, F, G, H внутри квадрата, что треугольники ABE, BCF, CDG, DAH — равносторонние.

Еще одна конструкция получается, если взять точки E, F, G, H вне квадрата.

11. (7-8, 8, все лиги) Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является полным квадратом.

Из равенства $xy + yz + xz = 1$ следует, что

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (1 + x^2)(1 + y^2)\left(1 + \left(\frac{1 - xy}{x + y}\right)^2\right) = \frac{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2}{(x + y)^2}$$

Значит, значение выражения $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ — целое число, равное отношению квадратов двух целых чисел. То есть оно само является полным квадратом.

12. (7, все, 7-8, 8, 1 лига) Найдите все четверки попарно различных натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab=c+d$ и $cd=a+b$.

Из данных равенств получаем, что ab−a−b=c+d−cd, откуда
ab−a−b+1+cd−c−d+1=2 или (a−1)(b−1)+(c−1)(d−1)=2. Далее перебором получаем ответы:
a=2,b=3,c=1,d=5;
a=2,b=3,c=5,d=1;
a=3,b=2,c=1,d=5;
a=3,b=2,c=5,d=1;
a=1,b=5,c=2,d=3;
a=1,b=5,c=3,d=2;
a=5,b=1,c=2,d=3;
a=5,b=1,c=3,d=2.

13. (все лиги) Житель города считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты профессора университета, иначе — небогатым. Докажите, что если доходы у всех разные, то можно установить профессору университета такую зарплату, чтобы богатых мужчин стало столько же, сколько небогатых женщин.

Пусть в городе N жителей, из которых M человек — мужчины. Пронумеруем всех жителей в порядке увеличения зарплаты номерами от 1 до N. Установим профессору зарплату больше, чем у M-го жителя, но меньше, чем у (M + 1)-го жителя. Пусть при этом K мужчин стали небогатыми. Тогда (M – K) мужчин остались богатыми, (M – K) женщин стали небогатыми. Что и требовалось.

14. (все лиги) Клетчатая бумажная полоска 2 x n склеена в цилиндрическое кольцо высоты 2. Два игрока по очереди вырезают по одной клетке. Игрок, после хода которого полоска развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре - начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

Ответ: если n четное, то выиграет второй, если n нечетное первый. Рассмотрим сначала случай четного n. Второй игрок мысленно разобьет каждый слой на доминошки, сместив разбиение на одну клетку (“кирпичиками”). Теперь на каждый ход первого игрока он будет отвечать ходом в ту же доминошку. Нетрудно видеть, что такая стратегия позволяет всегда иметь ход. Так как игра конечная, то такая стратегия приведет второго игрока в выигрышу. Если же n четное, то выиграет первый. После первого хода вырезанная им клетка “запрещает” ходить в три соседние с ней клетки другого ряда. Остаток (без вырезанной и запрещенных клеток) разбивается на доминошки точно так же. Стратегия, аналогичная описанной выше, на этот раз приводит к победе первого игрока.

15.(7 – 1, 2 лиги) $2n$ гирек поставлены в ряд по возрастанию весов, причем веса соседних гирь отличаются на 1 грамм. При каких n гирьки можно разложить на чаши весов по n гирек на каждую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии?

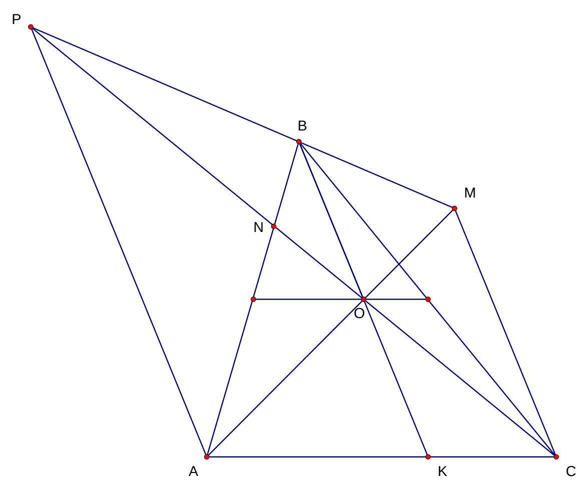
Ответ: при четных n. Пусть n=2k. Разобьем гири на пары отличающихся на 1 грамм и выберем k пар. Положим из выбранных пар более легкую гирю на левую чашу, более тяжелую – на правую. В остальных k парах поступим наоборот.

Если n=2k+1, то суммарный вес гирь нечетен и разложить гири нельзя.

Математический бой 2 (второй тур, высшая лига)

5	5	5	5	5	3	3
5	5	5	5	5	3	3
5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	1	1	1
5	5	5	5	1	1	1
4	4	4	4	1	1	1

1. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно составить 3 попарно различных квадрата. **<u>Решение</u>**. Разрежем на части, пронумерованные одинаковыми цифрами. Из частей с тройками, четверками и пятерками выложим квадрат 6×6.
2. Пусть $S(n)-$ сумма цифр натурального числа n. Найдется ли такое n, что $nS(n)=1000001$? **<u>Ответ</u>**. Нет. **<u>Решение</u>**. Заметим, что n и $S(n)$ имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому все возможные остатки от деления $nS(n)$ на 3 равны 0 или 1, а $1000001=3\cdot333333+2$.
3. Два велосипедиста стартуют из некоторой точки кругового трека в одном направлении. Отношение скоростей велосипедистов равно m/n ($m>n$, дробь несократимая). Чему равно число точек обгона при достаточно долгой езде? **<u>Ответ</u>**. $m-n$. **<u>Решение</u>**. Если первый проехал m кругов, а второй n кругов, то велосипедисты окажутся в месте старта и дальше точки обгона (всего обгонов было $m-n$) повторяются. Осталось понять, почему точки первых $m-n$ точек обгона различны. Ввиду того, что любую из этих точек обгона можно принять за новую точку старта, то совпадение каких либо точек обгона (из первых $m-n$) означает, что велосипедисты встретятся в точке начального старта раньше, чем указано вначале. Пусть это произошло впервые после того как первый проехал m_1 кругов, а второй n_1 кругов. Ясно, что дальше ситуация повторяется и $m=m_1k$, $n=n_1k$. Ввиду взаимной простоты чисел m и n, $m=m_1$, $n=n_1$.
4. Пусть a и b такие натуральные числа, что для любого натурального числа t числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение a/b? **<u>Ответ</u>**. $a/b=1/2$. **<u>Решение</u>**. Если $a/b=1/2$, то есть $a=k, b=2k$, тогда числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель $kt+1$. Допустим $b\neq2a$ и $n=|b-2a|>0$. Пусть для n числа $an+1$ и $bn+2$ делятся на натуральное число $d>1$. Тогда $2(an+1)-(bn+2)=\pm n^2$ и $(bn+2)-(an+1)=(b-a)n+1$ делятся на d, что



невозможно ввиду взаимной простоты указанных чисел.

5. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне АС, выбрана произвольная точка О. Через вершины А и С параллельно ВО провели прямые, которые пересекают прямые СО и АО соответственно в точках Р и М. Докажите, что точки В, Р и М лежат на одной прямой. **<u>Решение</u>.** Воспользуемся теоремой Менелая для треугольника ΔANO. Точки Р, В, М лежат на одной прямой, если выполняется равенство: $\frac{AB}{BN}\cdot\frac{NP}{PO}\cdot\frac{OM}{MA}=1$. Ввиду подобия соответствующих треугольников достаточно проверить равенство:

$\frac{AP+BO}{BO}\cdot\frac{AP}{AP+BO}\cdot\frac{OM}{MA}=1$ или $\frac{MA}{OM}=\frac{PA}{OB}$. Но $\frac{MA}{OM}=\frac{AC}{KC}=\frac{PA}{OK}=\frac{PA}{OB}$, что и требуется.

6. Решите в действительных числах систему: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37 \\ x^2+xz+z^2=28 \\ y^2+yz+z^2=19 \end{cases}$.

<u>Ответ</u>. $\pm(4,3,2),\pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. **<u>Решение</u>**. Вычтем из первого равенства второе. Получим $(y-z)(x+y+z)=9$. Аналогично, вычитая из второго уравнения третье, получим $(x-y)(x+y+z)=9$. Отсюда $x-y=y-z=\frac{9}{x+y+z}$. Положим $x-y=y-z=d$. Тогда $x=y+d,\ z=y-d$. Подставим в равенство $(y-z)(x+y+z)=9$. Получим $yd=3$. Подставим $x=y+d$ в первое уравнение, получим $3y^2+d^2=28$. Отсюда получаем четыре решения системы: $\pm(4,3,2),\pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

7. В некоторой компании 25 акционеров, причём любые 15 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер? <u>Ответ</u>. 20%. <u>Решение</u>. Расположим акционеров по возрастанию у них количества акций, и обозначим через x_i - процент акций у i – го акционера: $x_1\le x_2\le x_3\le\ldots\le x_{25}$. Тогда $x_1+x_2+\ldots+x_{15}\ge 50$, $x_{15}\ge\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$ и

$x_{16}+x_{17}+\ldots+x_{24}\geq 9\cdot\frac{10}{3}=30$, отсюда $x_1+x_2+\ldots+x_{24}\geq 80$ и $x_{25}\leq 20$. Такая ситуация возможна, если каждый из $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{24}=\frac{10}{3}$ и $x_{25}=20$.

8. Доказать для положительных чисел a, b и c неравенство $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+4b}\geq\frac{2}{3}$.

<u>Решение</u>. Воспользуемся неравенством: $\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3}\geq\frac{\left(x_1+x_2+x_3\right)^2}{y_1+y_2+y_3}$, которое верно для любых положительных y_1, y_2, y_3. Имеем $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+4b}=\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+3ab}+\frac{c^2}{ac+4bc}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{4ab+5bc+3ac}$. Чтобы проверить, что последняя дробь не меньше 2/3, достаточно проверить неравенство: $3a^2+3b^2+3c^2+6ab+6bc+6ac\geq 8ab+6ac+10bc$ или $3a^2+3b^2+3c^2\geq 2ab+4bc$. Последнее неравенство может быть проверено либо с использованием дискриминанта, либо преобразованием к неравенству $3\left(a-\frac{b}{3}\right)^2+3\left(c-\frac{2b}{3}\right)^2+\frac{4b^2}{3}\geq 0$.

Математический бой 2 (второй тур, первая лига)

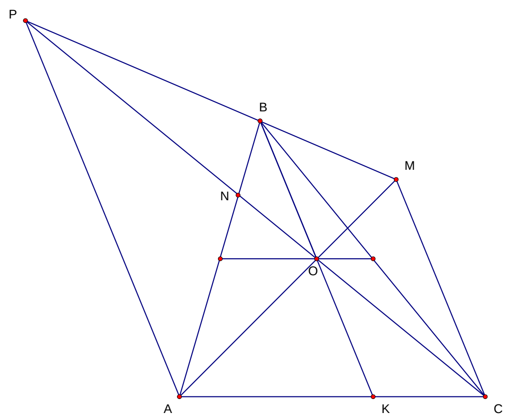
5	5	5	5	5	3	3
5	5	5	5	5	3	3
5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	1	1	1
5	5	5	5	1	1	1
4	4	4	4	1	1	1

1. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно составить 3 попарно различных квадрата. **<u>Решение</u>**. Разрежем на части, пронумерованные одинаковыми цифрами. Из частей с тройками, четверками и пятерками выложим квадрат 6×6.
2. Пусть $S(n)-$ сумма цифр натурального числа *n*. Найдется ли такое *n*, что $nS(n)=1001$? **<u>Ответ</u>**. Нет. **<u>Решение</u>**. Заметим, что *n* и $S(n)$ имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому все возможные остатки от деления $nS(n)$ на 3 равны 0 или 1, а $1001=3\cdot 333+2$.
3. Два велосипедиста стартуют из некоторой точки кругового трека в одном направлении. Отношение скоростей велосипедистов равно *m/n* ($m>n$, дробь несократимая). Чему равно число точек обгона при достаточно долгой езде? **<u>Ответ</u>**. $m-n$. **<u>Решение</u>**. Если первый проехал *m* кругов, а второй *n* кругов, то велосипедисты окажутся в месте старта и дальше точки обгона (всего обгонов было $m-n$) повторяются. Осталось понять, почему точки первых $m-n$ точек обгона различны. Ввиду того, что любую из этих точек обгона можно принять за новую точку старта, то совпадение каких либо точек обгона (из первых $m-n$) означает, что велосипедисты встретятся в точке начального старта раньше, чем указано вначале. Пусть это

произошло впервые после того как первый проехал m_1 кругов, а второй n_1 кругов. Ясно, что дальше ситуация повторяется и $m = m_1 k$, $n = n_1 k$. Ввиду взаимной простоты чисел m и n, $m = m_1$, $n = n_1$.

4. Пусть a и b такие натуральные числа, что для любого натурального числа t, числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение a/b? **Ответ**. $a/b = 1/2$. **Решение**. Если $a/b = 1/2$, то есть $a = k, b = 2k$, тогда числа $at+1$ и $bt+2$ имеют общий натуральный делитель $kt+1$. Допустим $b \neq 2a$ и $n = |b-2a| > 0$. Пусть для n числа $an+1$ и $bn+2$ делятся на натуральное число $d > 1$. Тогда $2(an+1)-(bn+2) = \pm n^2$ и $(bn+2)-(an+1) = (b-a)n+1$ делятся на d, что невозможно ввиду взаимной простоты указанных чисел.

5. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой. **Решение**. Воспользуемся теоремой Менелая для треугольника ΔANO. Точки P, B, M лежат на одной прямой, если выполняется равенство:

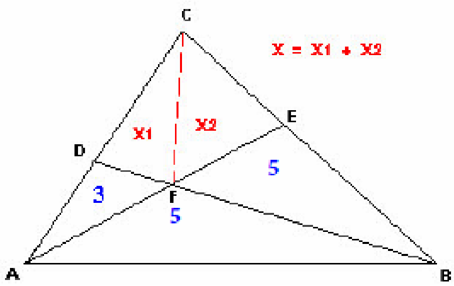


$\frac{AB}{BN} \cdot \frac{NP}{PO} \cdot \frac{OM}{MA} = 1$. Ввиду подобия соответствующих треугольников достаточно проверить равенство: $\frac{AP+BO}{BO} \cdot \frac{AP}{AP+BO} \cdot \frac{OM}{MA} = 1$ или $\frac{MA}{OM} = \frac{PA}{OB}$. Но $\frac{MA}{OM} = \frac{AC}{KC} = \frac{PA}{OK} = \frac{PA}{OB}$, что и требуется.

6. Решите в действительных числах систему $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 37 \\ x^2+xz+z^2 = 28 \\ y^2+yz+z^2 = 19. \end{cases}$. **Ответ**. $\pm(4,3,2)$, $\pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. **Решение**. Вычтем из первого равенства второе. Получим

$(y-z)(x+y+z)=9$. Аналогично, вычитая из второго уравнения третье, получим $(x-y)(x+y+z)=9$. Отсюда $x-y=y-z=\dfrac{9}{x+y+z}$. Положим $x-y=y-z=d$. Тогда $x=y+d, z=y-d$. Подставим в равенство $(y-z)(x+y+z)=9$. Получим $yd=3$. Подставим $x=y+d$ в первое уравнение, получим $3y^2+d^2=28$. Отсюда получаем четыре решения системы: $\pm(4,3,2),\pm\left(10/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};-8/\sqrt{3}\right)$.

7. Треугольник разделен на 4 части двумя отрезками. Известны площади трех треугольников (см. рисунок). Найти площадь четырехугольника *X*. **Ответ**. 27. **Решение**. Проведем отрезок *CF*, который разбивает четырехугольник на 2 треугольника, *CDF* и *CEF*, площади которых соответственно равны X_1 и X_2 (очевидно, $X=X_1+X_2$). Так как треугольники *ABF* и *BEF* имеют одинаковую площадь и их высоты равны, то основания также равны, то есть *AF* = *EF*. Треугольники *ACF* и *CEF* также имеют общую высоту, и одинаковые основания, поэтому их площади равны: $X_2=X_1+3$. Треугольники *ADF* и *ABF* имеют общую высоту и площади 3 и 5, соответственно, поэтому $BF:DF=5:3$. Треугольники *CBF* и *CDF* имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как $5:3$, отсюда $(5+X_2):X_1=5:3$. Решая систему, получаем: $X_1=12;\ X_2=15$ и $X=27$.



8. Для чисел *x, y, z* и *k* выполняются соотношения $\dfrac{7}{x+y}=\dfrac{k}{z+x}=\dfrac{11}{z-y}$. Найдите *k*.

Ответ. $k=18$.

Математический бой № 2
10-11 класс высшая лига

1. В 2019 коробках находится 1, 2, 3, …, 2019 конфет. За один раз Винни Пух может выбрать любую группу коробок и из каждой коробки этой группы извлечь одинаковое количество конфет. Какое минимальное количество раз Винни Пух сможет забрать все конфеты?

2. Можно ли в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, отыскать три члена, которые являются длинами сторон прямоугольного треугольника?

3. С квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$ можно выполнять две операции: 1) поменять местами коэффициенты a и c; 2) заменить x на $x + d$, где d – любое число. Можно ли с помощью этих операций превратить $x^2 - x - 2$ в $x^2 - x - 1$?

4. Пять отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Какое максимальное количество тупоугольных треугольников может оказаться?

5. На высоте AD, лежащей внутри треугольника ABC, взята произвольная точка. Точки K и L выбраны на сторонах AB и AC так, что отрезки CK и BL проходят через выбранную точку. Докажите, что углы ADK и ADL равны между собой.

6. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Стороны AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках K, L, M и N, соответственно. Точки P, Q, R и S середины сторон NK, KL, LM и MN. Докажите, что если четырехугольник $PQRS$ прямоугольник, то $ABCD$ вписанный четырехугольник.

7. Про каких-то n человек известно, что: 1) среди любых трех человек есть двое, которые знают друг друга; 2) среди любых четырех человек есть двое, которые не знают друг друга (предполагается, что если A знает B, то и B знает A). Найдите наибольшее возможное значение n.

8. Каждую субботу по письмам слушателей выбирают 20 популярнейших песен. Известно, что
1) в одном и том же порядке песни не могут звучать две недели подряд;
2) песня, однажды опустившаяся в выборке, в дальнейшем уже не поднимается.

Какое максимальное количество суббот, следуя этим правилам, могут держаться в выборке одни и те же песни?

1. В 2019 коробках находится 1, 2, 3, …, 2019 конфет. За один раз Винни Пух может выбрать любую группу коробок и из каждой коробки этой группы извлечь одинаковое количество конфет. Какое минимальное количество раз Винни Пух сможет забрать все конфеты?

Ответ: за 11. *Оценка.* Коробки, в которых находится одинаковое количество конфет, объединим в одну группу коробок. Вначале имеем 2019 групп (по одной коробке). Пусть в некоторый момент имеется n групп с различным количеством конфет (некоторые из которых могут быть пустыми). Пусть Винни выбрал k групп, из которых забирал конфеты. Заметим, что после этого есть k групп с различным количеством конфет и $n - k$ групп с различным количеством конфет, а всего таких групп не меньше $\max\{k, n - k\} \geq n/2$ групп с разным числом конфет. Значит, после первого хода их не менее 1009, второго 505, затем 253, 127, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

2. Можно ли в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, отыскать три члена, которые являются длинами сторон прямоугольного треугольника?

Ответ: нет, нельзя. Рассмотрим арифметическую прогрессию 1, 3, 5, …. Для нечетных чисел a, b, c равенство $a^2 + b^2 = c^2$ невозможно, поскольку остаток от деления на 4 у правой части равенства 1, у левой 2.

3. С квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$ можно выполнять две операции: 1) поменять местами коэффициенты a и c; 2) заменить x на $x + d$, где d – любое число. Можно ли с помощью этих операций превратить $x^2 - x - 2$ в $x^2 - x - 1$?

Ответ: нет, нельзя. Обе операции сохраняют величину дискриминанта у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Для операции 1) это совсем очевидно. Рассмотрим дискриминант $a(x + d)^2 + b(x + d) + c = ax^2 + (2ad + b)x + (ad^2 + bd + c)$. Получим: $(2ad + b)^2 - 4a(ad^2 + bd + c) = 4a^2d^2 + 4abd + b^2 - 4a^2d^2 - 4abd - 4ac = b^2 - 4ac$. Осталось заметить, что у исходного трехчлена дискриминант равен 9, а у второго равен 5.

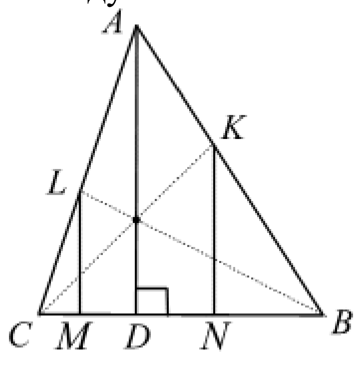
4. Пять отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Какое максимальное количество тупоугольных треугольников может оказаться?

Ответ: 9. *Оценка.* Заметим, что хотя бы один из этих треугольников – остроугольный. Пусть длины отрезков $a \ge b \ge c \ge d \ge e$. Предположив, что все треугольники не являются остроугольными, используя теорему косинусов и тот факт, что против большей стороны лежит больший угол можно записать три неравенства: $a^2 \ge b^2 + c^2$, $b^2 \ge c^2 + d^2$, $c^2 \ge d^2 + e^2$. Сложим эти неравенства $a^2 \ge c^2 + 2d^2 + e^2 \ge d^2 + 2de + e^2$ и получим $a \ge d + e$.

Пример пяти отрезков: 19, 20, 21, 30, 38. Обоснование. Во-первых, поскольку 19 + 20 > 38 из любых трёх отрезков можно составить треугольник. Поскольку $1444 = 38^2 > 30^2 + 21^2 = 1341$, любой треугольник со стороной 38 будет тупоугольным. Пусть треугольник не имеет стороны длины 38, но имеет сторону длины 30. Поскольку $900 = 30^2 > 21^2 + 20^2 = 841$, треугольники с максимальной стороной 30 будет тупоугольными. Наконец остался единственный треугольник с длинами сторон 19, 20, 21, который остроугольный, поскольку $761 = 19^2 + 20^2 > 21^2 = 441$.

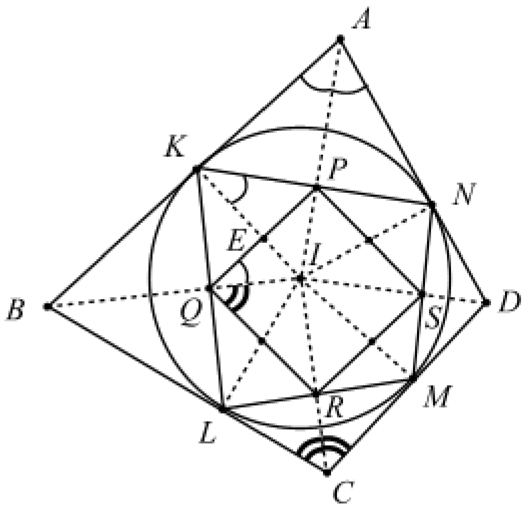
5. На высоте AD, лежащей внутри треугольника ABC, взята произвольная точка. Точки K и L выбраны на сторонах AB и AC так, что отрезки CK и BL проходят через выбранную точку. Докажите, что углы ADK и ADL равны между собой.

Из точек L и K опустим перпендикуляры LM и KN на сторону BC. Для решения задачи достаточно заметить соотношение $\frac{LM}{MD} = \frac{KN}{ND}$ или $\frac{LM \cdot ND}{MD \cdot KN} = 1$. Имеют место следующие соотношения: $LM = CL\sin\gamma$, $MD = LA\cos\gamma$, $KN = KB\sin\beta$, $ND = AK\cos\beta$ и $\frac{CL}{LA} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$ (теорема Чевы). Отсюда получаем



$$\frac{LM \cdot ND}{MD \cdot KN} = \frac{CL \cdot AK \sin\gamma \cos\beta}{LA \cdot KB \sin\beta \cos\gamma} = \frac{\dfrac{CD}{\cos\gamma}\sin\gamma}{\dfrac{BD}{\cos\beta}\sin\beta} = \frac{AD}{AD} = 1.$$

6. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Стороны AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках K, L, M и N, соответственно. Точки P, Q, R и S середины сторон NK, KL, LM и MN. Докажите, что если четырехугольник $PQRS$ прямоугольник, то $ABCD$ вписанный четырехугольник.



Соединим вершины четырехугольника $ABCD$ с центром I. Ясно, что проведенные отрезки будут проходить через точки P, Q, R и S. В треугольнике AKI угол K – прямой, поскольку K точка касания, отрезок PK является высотой, поскольку AI серединный перпендикуляр к KN.

Отсюда следует $\angle IAK = \angle IKP$.

Четырехугольник $IPKQ$ вписанный, поскольку его углы P и Q – прямые. Отсюда следует

$\angle IQP = \angle IKP$. Значит, $\angle IAK = \angle IQP$. Из соображений симметрии $\angle ICL = \angle IQR$. Из

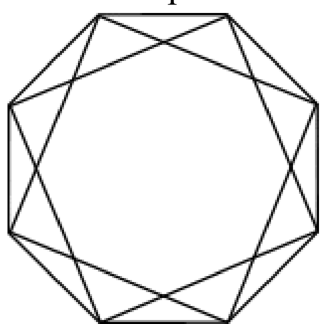
доказанного вытекает, что сумма половин углов A и C четырехугольника $ABCD$ равна 90°, значит, $ABCD$ – вписанный.

China Western Mathematical Olympiad.

Замечание. Верно и обратное утверждение.

7. Про каких-то n человек известно, что: 1) среди любых трех человек есть двое, которые знают друг друга; 2) среди любых четырех человек есть двое, которые не знают друг друга (предполагается, что если A знает B, то и B знает A). Найдите наибольшее возможное значение n.

Ответ: 8. *Оценка.* Допустим, нашелся человек, который знаком с шестью. Тогда среди этих шести найдутся либо трое попарно незнакомых, что противоречит 1), либо трое попарно знакомых, что противоречит 2). Отсюда следует, что каждый знаком не более чем с пятью. Допустим, нашелся человек незнакомый с четырьмя. Тогда из 1) следует, что эти четверо должны быть попарно знакомы, но это противоречит 2). Отсюда следует, что каждый незнаком не более чем с тремя. В итоге получаем, что $n \leq 9$. Допустим, что $n =$ 9. В



этом случае каждый знаком ровно с пятью. В графе знакомств получаем 9 нечетных вершин. Итак, $n \leq 8$. Пример. Граф знакомств изображен на рисунке. China Western Mathematical Olympiad 2005.

8. Каждую субботу по письмам слушателей выбирают 20 популярнейших песен. Известно, что

1) в одном и том же порядке песни не могут звучать две недели подряд;

2) песня, однажды опустившаяся в выборке, в дальнейшем уже не поднимается.

Какое максимальное количество суббот, следуя этим правилам, могут держаться в выборке одни и те же песни?

Ответ: 191 субботу. *Оценка.* Из условия 1) следует, что каждую субботу какие-то песни поднимаются в выборке (какие-то опускаются, какие-то, быть может, остаются на месте). Присвоим номера песням такие, в каком порядке эти песни прозвучали в первую субботу. Рассмотрим песню k. Представим себе, что прозвучав на некоторой неделе под номером n, песня k на следующей неделе, поднялась в рейтинге на одну или несколько позиций. Если $n > k$, то это означает, что с первой по n-ную неделю песня опускалась в выборке, что невозможно в силу условия 2). Значит, она поднимается с позиции не меньше k. Отсюда следует, что песня k может подниматься в выборке не более, чем $k - 1$ раз. Общее количество подъемов не превосходит сумму $0 + 1 + 2 + \ldots + 19 = 190$. Поскольку нет дней без подъемов, то и общее количество суббот с подъемами не более 190, с учетом начальной недели 191.

Пример. Присвоим номера песням такие, в каком порядке эти песни прозвучали в первую субботу. Во вторую субботу поднимается песня 2, песни исполняются так: 2, 1, 3, 4, …, 20. Далее, две недели поднимается песня 3, песни исполняются так: 2, 3, 1, 4, …, 20, далее 3, 2, 1, 4, …, 20. В 191 субботу, песни исполняются так: 20, 19, 18, …, 2, 1.

Решения день 2 первая лига 10-11

1. Решите уравнение $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2018} = 0$.

Ответ: $x = 0$, $x = -1$. Ясно, $x = 0$ корень уравнения. Сократим на x. Теперь заметим, что положительных корней нет. Подставим в уравнение $-x$ вместо x. Получим уравнение $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016} = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2017}$. Ясно, $x = 1$ корень нового уравнения и, соответственно, $x = -1$ корень исходного уравнения. Осталось заметить, что если $0 < x < 1$, то левая часть $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2016} = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2017}$ больше правой, а если $x > 1$ наоборот. Других корней нет.

2. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

Ответ: 91 число. Рассмотрим первые пять цифр a, b, c, d, e числа $\overline{abcde...z}$ $(a \neq 0)$, удовлетворяющего условию задачи.

Пусть среди них нет ни одного нуля. Тогда из $b = ac$, $c = bd$, $d = ce$ следует, что $bcd = ac^2bde$ и $1 = ace$. Следовательно, $a = c = e = 1$ и $b = d = 1$. Легко заметить, что и все последующие цифры числа – единицы.

Пусть теперь среди них есть хотя бы один ноль. Тогда, очевидно, все цифры числа, кроме первой и последней, должны быть нулями. В числах такого вида первая цифра может быть от 1 до 9, а последняя от 0 до 9, таких чисел $9 \cdot 10 = 90$.

3. Квадратный трехчлен $p(x)$ имеет корни x_1 и x_2, при этом выполняется равенство $p(2x + 1) = 4x^2 – 30x + 12$. Найдите $x_1 + x_2$.

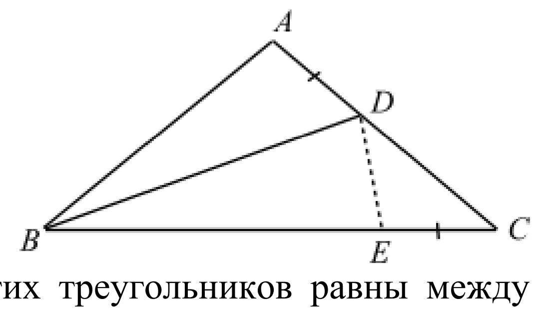
Ответ: 17. Сделаем подстановку $t = 2x + 1$, $x = \frac{t-1}{2}$. Находим $p(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t-1}{2}\right) + 12 = t^2 - 17t + 28$. По теореме Виета сумма корней трехчлена $p(x) = x^2 - 17x + 28$ равна 17.

4. Пусть S – множество натуральных чисел содержит числа 1, 2, 3 и 4 и обладает свойством: если различные числа a, b, c и d принадлежат S, то и их сумма $a + b + c + d$ тоже принадлежит S. Докажите, что число 2018 принадлежит S.

Заметим сначала, что $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 2 + 3 + 10 = 16$ это означает, что $10 \in S$, $16 \in S$. Далее, $1 + 2 + 4 + a = a + 7$ это означает, что если $a \in S$, то $a + 7 \in S$. Из равенства $2018 = 7 \cdot 286 + 16$ и доказанного выше следует, что $2018 \in S$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 100°$, $\angle B = \angle C = 40°$.



Обозначим $\angle B = \angle C = 2\beta$. Ясно, $AD < BC$. Отметим точку E на BC так, что $CE = AD$. Рассмотрим треугольники BAC и CED. Во-первых, углы B и C этих треугольников равны между собой. Заметим, что $CE/BA = AD/BA = CD/BC$ (последнее равенство следует из свойства биссектрисы: делить противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам). Это означает, что рассмотренные треугольники подобны.

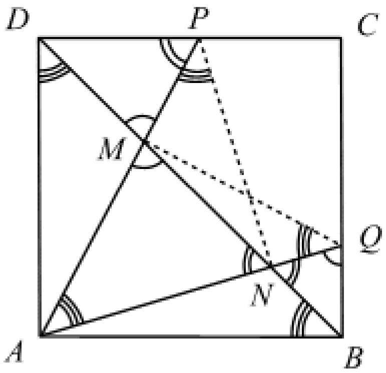
Отсюда следует, что $\angle CDE = 2\beta$, $\angle DEB = 4\beta$. Рассмотрим треугольник BDE. Ясно, $BE =$

$BC - CE = AD$ и $\angle BDE = 4\beta$. Получаем, что сумма углов треугольника BDE равна 9β, $\beta =$

$20°$.

6. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки Q и P так, что $\angle PAQ = 45^\circ$. Диагональ BD пересекает отрезки AP и AQ в точках M и N. Докажите, что четырехугольник $PMNQ$ вписанный.

Рассмотрим треугольники PDM и NAM. В этих треугольниках углы M равны, как вертикальные, углы D и A равны по $45°$. Значит, $\angle AND = \angle APD$, а четырехугольник $ANPD$ вписанный. Отсюда следует равенство углов ADN и APN, кроме того это означает, что $\angle APN = 45^\circ = \angle MPN$. Рассматривая треугольники QNB и MAN точно также замечается, что $\angle MQN = 45^\circ$. Четырехугольник $PMNQ$ вписанный, поскольку углы MPN и MQN равны.



7. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо $*$ Дима и Саша ставят знаки

арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

Ответ: Да, сможет. Ясно, что $\pm(3^3 + 1)$, $\pm(3^4 + 3)$, $\pm(3^5 + 3^2)$ делятся на 7. Отсюда стратегия Димы: разбить числа на пары $\{3^3, 1\}$, $\{3^4, 3\}$, $\{3^5, 3^2\}$ и ставить в паре тот же знак.

8. Двадцать различных натуральных чисел написали на десяти карточках, по одному на каждой стороне каждой карточки. Сумма двух чисел на каждой карточке является одинаковой для всех 10 карт. Карточки выложили на стол. Оказалось, что сумма десяти чисел, которые видны, совпадает с суммой чисел, которые не видны. Одну карточку убрали со стола. На столе видны девять чисел 2, 5, 17, 21, 24, 31, 35, 36 и 42. Карту, с какими числами на лицевой и обратной стороне удалили?

Ответ: 37 и 13. Обозначим x число на лицевой стороне, y – на обратной стороне у удаленной карты. Тогда из условия сумма чисел 2, 5, 17, 21, 24, 31, 35, 36, 42 и x – сумма десяти чисел, которые были видны, равна пятикратной сумме на десятой (удаленной) карте $5(x + y)$. Получаем соотношение $4x + 5y = 213$. Решим это уравнение в целых числах. Ясно, $x = \frac{213-5y}{4} = 54 - y - \frac{y-1}{4}$ и по соображениям делимости получаем $y = 4m+1$, $x = 52-5m$. Поскольку x и y натуральные необходимо, чтобы $1 \le m \le 10$. Осталось выполнить условие: все двадцать чисел различные. Рассмотрим таблицу, в которой найдены возможные значения десятой карты для $1 \le m \le 10$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	47	**42**	37	32	27	22	**17**	12	7	**2**
y	**5**	9	13	**17**	**21**	25	29	33	37	41

Для m = 1, 2, 4, 5, 7, 10 повторятся числа на лицевой стороне.

Рассмотрим $m = 6$, $x + y = 47$. С оборота у 5 будет **42**.

Рассмотрим $m = 8$, $x + y = 45$. С оборота у 21 будет **24**.

Рассмотрим $m = 9$, $x + y = 44$. С оборота у 42 будет **2**.

Рассмотрим $m = 3$, $x + y = 50$.

48	45	33	29	26	19	15	14	8	13
2	**5**	**17**	**21**	**24**	**31**	**35**	**36**	**42**	37

Получили все разные числа в ответ 37 и 13. Taiwan Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2000.

Математический бой № 2

10-11 класс вторая лига

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y^2 + xy + y = 20 \end{cases}$.

2. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$, где $a > 0$, $b > 0$.

3. В лес пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали n^2+9n-2 гриба, причём все собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

4. Для нумерации страниц некоторой книги использовано 6969 цифры. Сколько страниц в этой книге?

5. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

6. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо звездочек – $*$, Дима и Саша ставят

знаки арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

7. В трёхмерном пространстве придумайте такую фигуру, что её проекциями на координатные плоскости являются: на одну плоскость – квадрат, на другую – треугольник, а на третью – круг.

8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Решения день 2 первая лига 10-11

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+xy+x=10 \\ y^2+xy+y=20 \end{cases}$.

Ответ: (–2, –4) и $\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$. Складываем первое и второе уравнение системы $x^2+y^2+2xy+x+y=30$ или $(x+y)^2+(x+y)-30=0$. Пусть $t=x+y$, уравнение $t^2+t-30=0$ имеет два корня $t_1=5$ и $t_2=-6$. Вычитаем из первого уравнения второе, получим $x^2-y^2+x-y=-10$ или $(x-y)(x+y+1)=-10$.

Для $t = 5$, решая систему $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$ получаем $\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases}$.

Для $t = -6$, решая систему $\begin{cases} x + y = -6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ получаем $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$.

2. Докажите неравенство $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} \geq a + b$, где $a > 0$, $b > 0$.

Последовательно замечаем $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} - (a+b) = \dfrac{a^3 + b^3 - ab(a+b)}{ab} =$

$= \dfrac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)}{ab} = \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab} \geq 0$, при $a > 0, b > 0$.

3. В лес пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали $n^2 + 9n - 2$ гриба, причём все собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

Ответ: девочек было больше, чем мальчиков.

Пусть каждый собрал k грибов. Тогда $k(n+11) = n^2 + 9n - 2$ и $k = \dfrac{n^2 + 9n - 2}{n+11} = n - 2 + \dfrac{20}{n+11}$. Так как k –целое число, то число 20 должно делится на $n + 11$. Поэтому $n = 9$.

4. Для нумерации страниц некоторой книги использовано 6969 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 2019 страниц. Для нумерации однозначных страниц необходимо 9 цифр, для двухзначных – 180, для трёхзначных – 2700, для четырёхзначных – 36000. По условию задачи использовано 6877 цифры, $9 + 180 + 2700 = 2889 < 6969 < 2889 + 36000$, следовательно, нумерация заканчивается четырёхзначным числом. Далее, было использовано $\dfrac{6969 - 2889}{4} = 1020$ четырёхзначных чисел. Поскольку четырёхзначные числа начинаются с 1000, последним из них было 2019.

5. Сколько существует 2019-значных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?

Ответ: 91 число. Рассмотрим первые пять цифр *a, b, c, d, e* числа $\overline{abcde...z}$ $(a \neq 0)$, удовлетворяющего условию задачи.

Пусть среди них нет ни одного нуля. Тогда из $b = ac$, $c = bd$, $d = ce$ следует, что $bcd = ac^2bde$ и $1 = ace$. Следовательно, $a = c = e = 1$ и $b = d = 1$. Легко заметить, что и все последующие цифры числа – единицы.

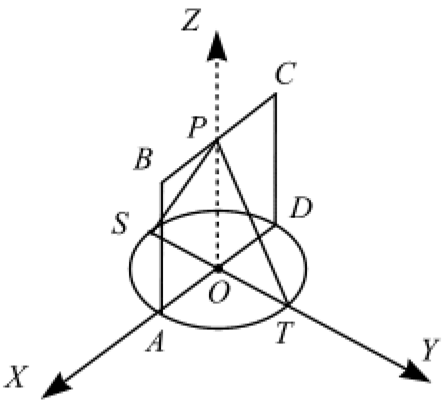
Пусть теперь среди них есть хотя бы один ноль. Тогда, очевидно, все цифры числа, кроме первой и последней, должны быть нулями. В числах такого вида первая цифра может быть от 1 до 9, а последняя от 0 до 9, таких чисел $9 \cdot 10 = 90$.

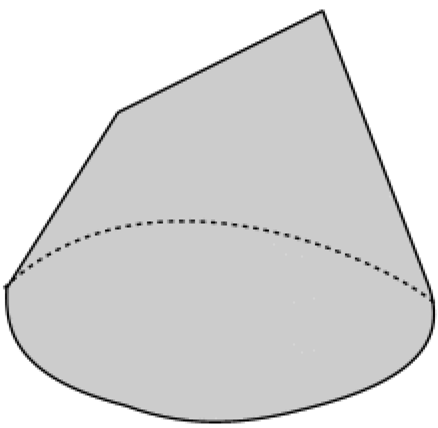
6. В выражении $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1$ вместо $*$ Дима и Саша ставят знаки арифметических действий «+» или «–» (один из двух). Может ли Дима, который ходит вторым, получить в конце выражение которое будет делиться на 7?

Ответ: Да, сможет. Ясно, что $\pm(3^3 + 1)$, $\pm(3^4 + 3)$, $\pm(3^5 + 3^2)$ делятся на 7. Отсюда стратегия Димы: разбить числа на пары $\{3^3, 1\}$, $\{3^4, 3\}$, $\{3^5, 3^2\}$ и ставить в паре тот же знак.

7. В трёхмерном пространстве придумайте такую фигуру, что её проекциями на координатные плоскости являются: на одну плоскость – квадрат, на другую – треугольник, а на третью – круг.

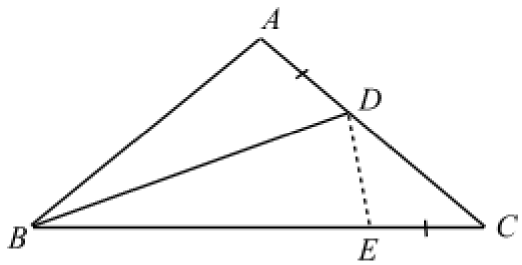
На рисунке представлена такая фигура. Можно считать, что центр круга точка *O* есть начало координат, радиусы *OA* и *OD* лежат на оси *OX*, радиусы *OT* и *OS* лежат на оси *OY*, квадрат *ABCD* имеет общую точку *P* с осью *OZ*, *SPT* – треугольник. По построению имеем: проекцией на плоскость *XOY* будет круг, на плоскость *XOZ* – квадрат, на плоскость *YOZ* – треугольник.





8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона BC является основанием, биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Оказалось, что имеет место равенство $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 100°$, $\angle B = \angle C = 40°$.



Обозначим $\angle B = \angle C = 2\beta$. Ясно, $AD < BC$. Отметим точку E на BC так, что $CE = AD$. Рассмотрим треугольники BAC и CED. Во-первых, углы B и C этих треугольников равны между собой. Заметим, что $CE/BA = AD/BA = CD/BC$ (последнее равенство следует из свойства биссектрисы: делить противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам). Это означает, что рассмотренные треугольники подобны.

Отсюда следует, что $\angle CDE = 2\beta$, $\angle DEB = 4\beta$. Рассмотрим треугольник BDE. Ясно, $BE =$

$BC - CE = AD$ и $\angle BDE = 4\beta$. Получаем, что сумма углов треугольника BDE равна 9β, $\beta =$

$20°$.